CS (Main) Exam, 2013

वियोज्य / DETACHABLE

गणित (प्रश्नपत्र I)

MATHEMATICS (Paper I)

समय : तीन घण्टे	*अधिकतम अंक : 250*
Time Allowed : Three Hours	*Maximum Marks : 250*

प्रश्नपत्र के लिए निर्देश

उत्तर लिखना शुरू करने से पहले कृपया निम्न निर्देशों में से प्रत्येक को ध्यानपूर्वक पढ़ लीजिए।

आठ प्रश्नों को दो **खंडों** मे बांटा गया है और **हिन्दी** तथा **अंग्रेजी** में छापा गया है।

उम्मीदवार को कुल **पांच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न **1** एवं **5** अनिवार्य हैं, बाकी में से **तीन** का उत्तर प्रत्येक खंड से न्यूनतम **एक** प्रश्न लेते हुए करना है।

प्रश्न / अंश के अंक उस के सामने दिये गए हैं।

उत्तर उसी माध्यम में दिये जाने हैं जो सार्टिफिकेट में अनुमत है। उसका उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (QCA) बुकलेट में निर्धारित स्थान पर मुखपृष्ठ पर करना जरूरी है। अनुमत माध्यम से भिन्न माध्यम में दिये उत्तरों पर कोई अंक नहीं दिया जायेगा।

जरूरत होने पर, उचित आंकड़े मान लें, उस का उल्लेख स्पष्टत: अवश्य करें।

यदि अन्यथा सूचित नहीं हो, सिंबल एवं नोटेशन आम तौर पर प्रयुक्त सामान्य अर्थ वहन करते हैं।

सभी प्रश्नों को क्रमान्वय में गिना जायेगा। प्रश्न आंशिक रूप में किया गया, तो भी गिना जायेगा यदि उसे नहीं काट दिया गया हो। कोई खाली पन्ना या अंश यदि उत्तर पुस्तिका में छोड़ा गया है, उसे स्पष्टत: अवश्य काट दें।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are EIGHT questions divided into two SECTIONS and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question No. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खंड 'क'

1. सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

1.(a) प्रारंभिक पंक्ति संक्रिया का इस्तेमाल करते हुए, आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

का प्रतिलोम मालूम कीजिए । अतएव रैखिक समीकरणों के तंत्र को हल कीजिए

$$x + 3y + z = 10$$
$$2x - y + 7z = 21$$
$$3x + 2y - z = 4$$

10

1.(b) लीजिए एक वर्ग आव्यूह A और उसका संलग्न A^* । दर्शाइए कि आव्यूहों AA^* और A^*A के आइगन मान वास्तविक हैं । आगे दर्शाइए कि ट्रेस $(AA^*) =$ ट्रेस (A^*A) । 10

1.(c) मूल्यांकन कीजिए $\int_0^1 \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx$ । 10

1.(d) एक ऐसे समतल का समीकरण मालूम कीजिए जो बिंदुओं $(0, 1, 1)$ और $(2, 0, -1)$ में से गुज़रता हो और जो बिंदुओं $(-1, 1, -2)$, $(3, -2, 4)$ को जोड़ने वाली रेखा के समांतर हो । इसके साथ ही रेखा और समतल के बीच की दूरी भी मालूम कीजिए । 10

1.(e) एक गोलक S के व्यास के आमने-सामने के सिरों पर बिंदु $(0, 1, 0)$, $(3, -5, 2)$ हैं । गोलक के समीकरण को मालूम कीजिए, जिसका गोलक S का समतल $5x - 2y + 4z + 7 = 0$ के साथ प्रतिच्छेद एक बृहत् वृत्त के रूप में है । 10

2.(a)(i) लीजिए कि P_n अधिकांश n पर कोटि के सभी वास्तविक बहुपदों की सदिश समष्टि को द्योतित करता है और कि $T : P_2 \to P_3$ निम्नलिखित द्वारा दत्त एक रैखिक रूपांतरण है :

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)dt, \qquad p(x) \in P_2$$

P_2 और P_3 के क्रमशः $\{1, x, x^2\}$ और $\{1, x, 1+x^2, 1+x^3\}$ आधारों के विषय में T का आव्यूह मालूम कीजिए । इस के साथ T की शून्य समष्टि भी मालूम कीजिए । 10

2.(a)(ii) लीजिए कि V एक n-विमीय सदिश समष्टि है और $T : V \to V$ एक व्युत्क्रमणीय रैखिक संकारक है । यदि $\beta = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ आधार हो V का, तो दर्शाइए कि $\beta' = \{TX_1, TX_2, \ldots, TX_n\}$ भी V का आधार होगा । 8

2.(b)(i) लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix}$ जहाँ $\omega(\neq 1)$ एक का घनमूल है । यदि $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ द्योतित करते हैं A^2 के आइगन मानों का, तो दर्शाइए कि $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \leq 9$. 8

2.(b)(ii) निम्नलिखित आव्यूह की कोटि को मालूम कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 \\ 8 & 12 & 17 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

8

2.(c)(i) लीजिए कि A एक हार्मिटी आव्यूह है, जिसके सभी सुस्पष्ट आइगन मान $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ हैं। यदि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ संगत आइगन सदिश हों तो, दर्शाइए कि $n \times n$ आव्यूह C, जिसका k वां स्तंभ सदिश X_k का हो, व्युत्क्रमणीय होता है। 8

2.(c)(ii) दर्शाइए कि C^3 में सदिश $X_1 = (1, 1+i, i)$, $X_2 = (i, -i, 1-i)$ और $X_3 = (0, 1-2i, 2-i)$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर रैखिकत: स्वतंत्र हैं, लेकिन सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र पर रैखिकत: परतंत्र हैं। 8

3.(a) लाग्रांज की गुणक पद्धति व्यवहार कर रेखा $y = 10 - 2x$ और दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ के बीच लघुतम दूरी मालूम कीजिए। 20

3.(b) $f_{xy}(0, 0)$ और $f_{yx}(0, 0)$ फलन के लिए परिकलन कीजिए

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f_{xy} तथा f_{yx} की $(0, 0)$ पर निरंतरता पर विचार कीजिए। 15

3.(c) $\iint\limits_D xy\, dA$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ D, रेखा $y = x - 1$ और पैराबोला $y^2 = 2x + 6$ के द्वारा परिबद्ध प्रदेश है। 15

4.(a) दर्शाइए कि गोलक $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$ पर किसी भी बिंदु से गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ तक तीन आपस में लंब स्पर्शरिखाएं खींची जा सकती हैं। 15

4.(b) एक शंकु का अपने गाइडिंग वक्र के रूप में वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0, z = 0$ है और वह एक स्थिर बिंदु $(0, 0, c)$ के बीच से गुज़रता है। यदि समतल $y = 0$ के द्वारा शंकु का परिच्छेद एक आयताकार हाइपरबोला हो, तो साबित कीजिए कि शीर्ष निम्नलिखित स्थिर वृत्त पर होगा :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$$
$$2ax + 2by + cz = 0.$$

15

4.(c) एक परिवर्ती जेनेरेटर तंत्र के दो जेनेरेटरों से मिलता है, और उसका मिलन P और P' में अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2c^2 = 1$ के प्रधान दीर्घवृत्तीय परिच्छेद के अल्प अक्ष के सिरों B और B' में से होता है। सिद्ध कीजिए कि $BP \cdot B'P' = a^2 + c^2$. 20

खंड 'ख'

5. सभी प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

5.(a) y एक फलन है x का, इस प्रकार कि अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ निम्नलिखित के बराबर है $\cos(x+y)+\sin(x+y)$ । x और y के बीच संबंध मालूम कीजिए, जो किसी अवकलज/अवकल से मुक्त हो । 10

5.(b) $r^n = a \sin n\theta$ के द्वारा व्यंजित वक्र-कुल की लंबकोणीय संछेदी का समीकरण प्राप्त कीजिए। (r, θ) समतल ध्रुवीय निर्देशांक हैं । 10

5.(c) एक पिंड ऋजु रेखा OPQ में सरल आवर्त गति (S.H.M.) कर रहा है । उसका बिंदु P और Q पर शून्य वेग है, जिनके O से दूरियां क्रमशः x और y हैं और उसका P और Q के बीच मध्य-बिंदु पर वेग v है । एक पूर्ण दोलन का समय मालूम कीजिए । 10

5.(d) एक आनत समतल का आधार लंबाई में 4 मीटर और ऊँचाई में 3 मीटर है । समतल के समांतर कार्य करता हुआ 8 kg का एक बल 20 kg के भार को नीचे की ओर सरकने को मुश्किल से रोकता है । समतल और भार के बीच घर्षण गुणांक मालूम कीजिए । 10

5.(e) दर्शाइए कि वक्र

$\vec{x}(t) = t\hat{i} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{j} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k}$ एक समतल में स्थित है । 10

6.(a) अवकल समीकरण को हल कीजिए
$(5x^3 + 12x^2 + 6y^2)dx + 6xydy = 0.$ 10

6.(b) प्राचल विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$ को हल कीजिए । 10

6.(c) समीकरण

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \ln x \sin(\ln x)$ का सामान्य हल मालूम कीजिए । 15

6.(d) आरंभिक शर्तों

$t = 0$ पर $x = 0$ और $\frac{dx}{dt} = 0$ के अधीन अवकल समीकरण

$(D^2 + n^2)x = a\sin(nt+\alpha),\ D^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ को लैप्लेस रूपांतर विधि का इस्तेमाल करते हुए हल कीजिए, जिसमें a, n और α नियतांक हैं । 15

7.(a) 2·5 kg द्रव्यमान का एक कण 0·9 m लंबी ऐसी रस्सी के सिरे पर लटका हुआ है, जिसका दूसरा सिरा एक स्थिर बिंदु के साथ जुड़ा हुआ है । कण को वेग 8 m/सै. के साथ क्षैतिजतः प्रक्षेपित किया जाता है । जब रस्सी (i) क्षैतिज, (ii) ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर हो, तब कण के वेग और रस्सी में तनाव को मालूम कीजिए । 20

7.(b) एक एकसमान सीढ़ी क्षितिज के साथ 45° के कोण पर रखी है। उसका ऊपरी सिरा खुरदरी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका है और निचला सिरा भूमि पर टिका है। यदि μ और μ' क्रमश: सीढ़ी और भूमि के बीच और सीढ़ी और दीवार के बीच सीमक घर्षण के गुणांक हों, तो सीढ़ी के निचले सिरे को दीवार की तरफ खिसकाने के लिए आवश्यक न्यूनतम क्षैतिज बल मालूम कीजिए। 15

7.(c) छह बराबर की छड़ें AB, BC, CD, DE, EF और FA, जिनमें से प्रत्येक का भार W है, अपने सिरों से मुक्त रूप से ऐसे जुड़ी हुई हैं कि एक षड्भुज बन गया है। छड़ AB क्षैतिज स्थिति में जुड़ी हुई है और AB और DE के मध्य बिंदु एक रस्सी से जुड़े हैं। रस्सी में तनाव मालूम कीजिए। 15

8.(a) $\nabla^2(r^n)$ का परिकलन कीजिए और r और n के रूप में उसका व्यंजक मालूम कीजिए। r मूल से किसी बिंदु (x, y, z) की दूरी है, n एक नियतांक है और ∇^2 लैप्लेस संकारक है। 10

8.(b) आकाश में एक वक्र निम्नलिखित सदिश समीकरण के द्वारा परिभाषित है $\vec{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} - t^3\hat{k}$ बिंदुओं $t = +1$ और $t = -1$ पर इस वक्र पर स्पर्शरेखाओं के बीच कोण का निर्धारण कीजिए। 10

8.(c) गाउस के अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए, पृष्ठ-समाकल

$\iint \left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right)^{-\frac{1}{2}} dS$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ S दीर्घवृत्तज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का पृष्ठ है। a, b और c सभी धनात्मक नियतांक हैं। 15

8.(d) रेखा समाकल $\int_C \left(-y^3dx + x^3dy - z^3dz\right)$ का मूल्यांकन करने के लिए स्टोक का प्रमेय व्यवहार कीजिए, जहां C है सिलिंडर $x^2 + y^2 = 1$ और समतल $x + y + z = 1$ का प्रतिच्छेदन। 15

SECTION 'A'

1. Answer all the questions :

1.(a) Find the inverse of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

by using elementary row operations. Hence solve the system of linear equations

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 10 \\ 2x - y + 7z &= 21 \\ 3x + 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

10

1.(b) Let A be a square matrix and A^* be its adjoint, show that the eigenvalues of matrices AA^* and A^*A are real. Further show that trace (AA^*) = trace (A^*A). 10

1.(c) Evaluate $\int_0^1 \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx$. 10

1.(d) Find the equation of the plane which passes through the points (0, 1, 1) and (2, 0, −1), and is parallel to the line joining the points (−1, 1, −2), (3, −2, 4). Find also the distance between the line and the plane. 10

1.(e) A sphere S has points (0, 1, 0), (3, −5, 2) at opposite ends of a diameter. Find the equation of the sphere having the intersection of the sphere S with the plane $5x-2y+4z+7=0$ as a great circle. 10

2.(a)(i) Let P_n denote the vector space of all real polynomials of degree atmost n and $T: P_2 \to P_3$ be a linear transformation given by

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)dt, \qquad p(x) \in P_2.$$

Find the matrix of T with respect to the bases $\{1, x, x^2\}$ and $\{1, x, 1+x^2, 1+x^3\}$ of P_2 and P_3 respectively. Also, find the null space of T. 10

2.(a)(ii) Let V be an n-dimensional vector space and $T: V \to V$ be an invertible linear operator. If $\beta = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ is a basis of V, show that $\beta' = \{TX_1, TX_2, \ldots, TX_n\}$ is also a basis of V. 8

2.(b)(i) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix}$ where $\omega(\neq 1)$ is a cube root of unity. If $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ denote the eigenvalues of A^2, show that $|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3| \leq 9$. 8

2.(b)(ii) Find the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 \\ 8 & 12 & 17 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

8

2.(c)(i) Let A be a Hermetian matrix having all distinct eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. If $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are corresponding eigenvectors then show that the $n \times n$ matrix C whose k^{th} column consists of the vector X_k is non singular. 8

2.(c)(ii) Show that the vectors $X_1 = (1, 1+i, i)$, $X_2 = (i, -i, 1-i)$ and $X_3 = (0, 1-2i, 2-i)$ in C^3 are linearly independent over the field of real numbers but are linearly dependent over the field of complex numbers. 8

3.(a) Using Lagrange's multiplier method, find the shortest distance between the line $y = 10-2x$ and the ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. 20

3.(b) Compute $f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$ for the function

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y)=(0, 0). \end{cases}$$

Also, discuss the continuity of f_{xy} and f_{yx} at (0, 0). 15

3.(c) Evaluate $\iint_D xy \, dA$, where D is the region bounded by the line $y = x - 1$ and the parabola $y^2 = 2x + 6$. 15

4.(a) Show that three mutually perpendicular tangent lines can be drawn to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ from any point on the sphere $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$. 15

4.(b) A cone has for its guiding curve the circle $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$, $z = 0$ and passes through a fixed point $(0, 0, c)$. If the section of the cone by the plane $y = 0$ is a rectangular hyperbola, prove that the vertex lies on the fixed circle

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$$
$$2ax + 2by + cz = 0.$$

15

4.(c) A variable generator meets two generators of the system through the extremities B and B' of the minor axis of the principal elliptic section of the hyperboloid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2c^2 = 1$ in P and P'. Prove that $BP \cdot B'P' = a^2 + c^2$. 20

SECTION 'B'

5. Answer all the questions :

5.(a) y is a function of x, such that the differential coefficient $\dfrac{dy}{dx}$ is equal to $\cos(x + y) + \sin(x + y)$. Find out a relation between x and y, which is free from any derivative/differential. 10

5.(b) Obtain the equation of the orthogonal trajectory of the family of curves represented by $r^n = a \sin n\theta$, (r, θ) being the plane polar coordinates. 10

5.(c) A body is performing S.H.M. in a straight line OPQ. Its velocity is zero at points P and Q whose distances from O are x and y respectively and its velocity is v at the mid-point between P and Q. Find the time of one complete oscillation. 10

5.(d) The base of an inclined plane is 4 metres in length and the height is 3 metres. A force of 8 kg acting parallel to the plane will just prevent a weight of 20 kg from sliding down. Find the coefficient of friction between the plane and the weight. 10

5.(e) Show that the curve

$$\vec{x}(t) = t\hat{i} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{j} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k}$$ lies in a plane.

10

6.(a) Solve the differential equation
$(5x^3 + 12x^2 + 6y^2)dx + 6xydy = 0.$ 10

6.(b) Using the method of variation of parameters, solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax.$$ 10

6.(c) Find the general solution of the equation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \ln x \sin(\ln x).$$ 15

6.(d) By using Laplace transform method, solve the differential equation

$\left(D^2 + n^2\right)x = a \sin(nt + \alpha)$, $D^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ subject to the initial conditions

$x = 0$ and $\frac{dx}{dt} = 0$, at $t = 0$, in which a, n and α are constants. 15

7.(a) A particle of mass 2·5 kg hangs at the end of a string, 0·9 m long, the other end of which is attached to a fixed point. The particle is projected horizontally with a velocity 8 m/sec. Find the velocity of the particle and tension in the string when the string is (i) horizontal (ii) vertically upward. 20

7.(b) A uniform ladder rests at an angle of 45° with the horizontal with its upper extremity against a rough vertical wall and its lower extremity on the ground. If μ and μ' are the coefficients of limiting friction between the ladder and the ground and wall respectively, then find the minimum horizontal force required to move the lower end of the ladder towards the wall. 15

7.(c) Six equal rods AB, BC, CD, DE, EF and FA are each of weight W and are freely jointed at their extremities so as to form a hexagon; the rod AB is fixed in a horizontal position and the middle points of AB and DE are joined by a string. Find the tension in the string. 15

8.(a) Calculate $\nabla^2(r^n)$ and find its expression in terms of r and n, r being the distance of any point (x, y, z) from the origin, n being a constant and ∇^2 being the Laplace operator. 10

8.(b) A curve in space is defined by the vector equation $\vec{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} - t^3\hat{k}$. Determine the angle between the tangents to this curve at the points $t = +1$ and $t = -1$. 10

8.(c) By using Divergence Theorem of Gauss, evaluate the surface integral

$\iint\left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right)^{-\frac{1}{2}} dS$, where S is the surface of the ellipsoid

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, a, b and c being all positive constants. 15

8.(d) Use Stokes' theorem to evaluate the line integral $\int_C\left(-y^3dx + x^3dy - z^3dz\right)$, where C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $x + y + z = 1$. 15

CS (Main) Exam : ,2014

C-DRN-N-OBUA

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : तीन घंटे
Time allowed : ***Three Hours***

अधिकतम अंक : ***250***
Maximum Marks : ***250***

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों का उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें आठ प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेज़ी दोनों में छपे हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. ***सभी*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer ***all*** the questions : *10×5=50*

(a) एक सदिश R^3 में ज्ञात कीजिए, जो कि V तथा W के प्रतिच्छेद का जनक है, जहाँ कि V एक xy समतल है तथा W सदिश (1, 2, 3) तथा सदिश (1, –1, 1) के द्वारा जनित किया गया आकाश (स्पेस) है ।

Find one vector in R^3 which generates the intersection of V and W, where V is the xy plane and W is the space generated by the vectors (1, 2, 3) and (1, –1, 1). *10*

(b) प्रारंभिक पंक्ति या स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग करके, आव्यूह (मैट्रिक्स)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

की कोटि ज्ञात कीजिए ।

Using elementary row or column operations, find the rank of the matrix *10*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos x + 1 = 0$ के दो वास्तविक मूलों के बीच $e^x \sin x + 1 = 0$ का एक वास्तविक मूल स्थित है ।

Prove that between two real roots of $e^x \cos x + 1 = 0$, a real root of $e^x \sin x + 1 = 0$ lies. *10*

(d) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{\log_e(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Evaluate : 10

$$\int_0^1 \frac{\log_e(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

(e) परीक्षण कीजिए कि क्या समतल $x + y + z = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को समकोणीय (लंब) रेखाओं में काटता है ।

Examine whether the plane $x + y + z = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular lines. 10

Q2. (a) मान लीजिए कि V और W निम्न उपसमष्टियाँ हैं R^4 की :

$V = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$ और

$W = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$.

(i) V, (ii) W, (iii) $V \cap W$ का एक आधार और विस्तार ज्ञात कीजिए ।

Let V and W be the following subspaces of R^4 :

$V = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$ and

$W = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$.

Find a basis and the dimension of (i) V, (ii) W, (iii) $V \cap W$. 15

(b) (i) λ तथा μ के मान जाँच कीजिए ताकि समीकरण $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ का (1) कोई हल नहीं है, (2) एक अद्वितीय हल है, (3) अपरिमित हल हैं ।

Investigate the values of λ and μ so that the equations $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ have (1) no solution, (2) a unique solution, (3) an infinite number of solutions. 10

(ii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए कैली – हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए और अतएव इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । साथ ही, $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10\,I$ के द्वारा निरूपित आव्यूह भी ज्ञात कीजिए ।

Verify Cayley – Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ and hence find its inverse. Also, find the matrix represented by $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10\,I$. 10

(c) रूपांतर $x + y = u$, $y = uv$ का प्रयोग करते हुए, समाकल $\iint \{xy\,(1 - x - y)\}^{1/2}\, dx\, dy$ का सीधी रेखाएँ $x = 0$, $y = 0$ तथा $x + y = 1$ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर मूल्यांकन कीजिए ।

By using the transformation $x + y = u$, $y = uv$, evaluate the integral $\iint \{xy\,(1 - x - y)\}^{1/2}\, dx\, dy$ taken over the area enclosed by the straight lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$. 15

Q3. (a) एक ऐसे महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जो कि a त्रिज्या के गोले के भीतर आ सके ।

Find the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius a. 15

(b) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ तथा $lx + my + nz = 0$ के द्वारा प्रतिबंधित $x^2 + y^2 + z^2$ के अधिकतम या निम्नतम मान ज्ञात कीजिए । परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए ।

Find the maximum or minimum values of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$. Interpret the result geometrically. 20

(c) (i) मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. A के आइगेन मानों और संगत आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए ।

Let $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Find the eigen values of A and the corresponding eigen vectors. 8

(ii) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह के आइगेन मानों का निरपेक्ष मान 1 होता है ।

Prove that the eigen values of a unitary matrix have absolute value 1. 7

Q4. (a) (i) गोलक $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$ के बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके स्पर्शी समतल, समतल $2x - y + 2z = 1$ के समांतर हैं ।

Find the co-ordinates of the points on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$, the tangent planes at which are parallel to the plane $2x - y + 2z = 1$. *10*

(ii) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु निरूपित करता है, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$ हो तो ।

Prove that the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$, represents a cone if $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$. *10*

(b) दर्शाइए कि उद्गम (मूल-बिन्दु) से खींची हुई रेखाएँ, जो केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के समतल $lx + my + nz = p$ के साथ प्रतिच्छेदन बिन्दुओं पर लम्बों के समान्तर हैं, शंकु $p^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) = \left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c}\right)^2$ का जनन करती हैं ।

Show that the lines drawn from the origin parallel to the normals to the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, at its points of intersection with the plane $lx + my + nz = p$ generate the cone

$$p^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) = \left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c}\right)^2.$$ *15*

(c) अतिपरवलयज के समतल $z = 0$ के द्वारा मुख्य दीर्घवृत्तीय खण्ड $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$ के कोई बिन्दु $(a \cos\theta,\ b \sin\theta,\ 0)$ में से दो जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equations of the two generating lines through any point $(a \cos\theta, b \sin\theta, 0)$, of the principal elliptic section $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$, of the hyperboloid by the plane $z = 0$. *15*

खण्ड B

SECTION B

Q5. ***सभी*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
Answer ***all*** the questions : *10×5=50*

(a) उचित ठहराइए कि

$$[y + x\, f(x^2 + y^2)]\, dx + [y\, f(x^2 + y^2) - x]\, dy = 0$$

की भांति अवकल समीकरण जहाँ कि $f(x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2)$ का एक स्वेच्छ फलन है, एक यथातथ अवकल समीकरण नहीं है तथा इसका $\frac{1}{x^2 + y^2}$ एक समाकलन गुणक है । अतएव इस अवकल समीकरण को $f(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$ के लिए हल कीजिए ।

Justify that a differential equation of the form :

$$[y + x\, f(x^2 + y^2)]\, dx + [y\, f(x^2 + y^2) - x]\, dy = 0,$$

where $f(x^2 + y^2)$ is an arbitrary function of $(x^2 + y^2)$, is not an exact differential equation and $\frac{1}{x^2 + y^2}$ is an integrating factor for it. Hence solve this differential equation for $f(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$. *10*

(b) वह वक्र ज्ञात कीजिए जिसके लिए कि स्पर्शी का भाग जो अक्षों द्वारा काटा हुआ है, स्पर्शी बिन्दु पर द्विभाजित हो ।

Find the curve for which the part of the tangent cut-off by the axes is bisected at the point of tangency. *10*

(c) एक कण एक सरल आवर्त गति (S.H.M.), केन्द्र O पर कालांक (आवर्तकाल) T, आयाम a के साथ प्रस्तुत कर रहा है तथा यह एक बिन्दु P से गुज़रता है, जहाँ कि OP = b, OP की दिशा में । सिद्ध कीजिए कि गुज़रा हुआ समय जब यह P पर वापस लौटता है, $\frac{T}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ है ।

A particle is performing a simple harmonic motion (S.H.M.) of period T about a centre O with amplitude a and it passes through a point P, where OP = b in the direction OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is $\frac{T}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. *10*

(d) दो बराबर एकसमान दंड AB तथा AC, प्रत्येक l लंबे, A पर मुक्त रूप से जुड़े हैं तथा त्रिज्या r के चिकने नियत ऊर्ध्वाधर वृत्त पर टिके हैं । यदि दंडों के बीच कोण 2θ है, तो कल्पित कार्य सिद्धांत के प्रयोग से l, r तथा θ में संबंध ज्ञात कीजिए ।

Two equal uniform rods AB and AC, each of length l, are freely jointed at A and rest on a smooth fixed vertical circle of radius r. If 2θ is the angle between the rods, then find the relation between l, r and θ, by using the principle of virtual work. *10*

(e) वक्र $\bar{r}(t) = t \cos t \, \hat{i} + t \sin t \, \hat{j}, \; 0 \le t \le 2\pi$ के किसी भी बिन्दु पर वक्रता सदिश ज्ञात कीजिए । उसका परिमाण भी बताइए ।

Find the curvature vector at any point of the curve

$\bar{r}(t) = t \cos t \, \hat{i} + t \sin t \, \hat{j}, \; 0 \le t \le 2\pi.$

Give its magnitude also. *10*

Q6. (a) प्राचलों के विचरण की विधि के द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$$

Solve by the method of variation of parameters : *10*

$$\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$$

(b) अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 8y = 65 \cos (\log_e x)$$

Solve the differential equation : *20*

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 8y = 65 \cos (\log_e x)$$

(c) स्टोक्स के प्रमेय के द्वारा मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_\Gamma (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$$

जहाँ Γ वक्र है $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0, x + y = 2a$, जो कि (2a, 0, 0) से शुरू होता है और फिर z-समतल के नीचे से होकर जाता है ।

Evaluate by Stokes' theorem

$$\int_\Gamma (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$$

where Γ is the curve given by $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0, x + y = 2a$, starting from (2a, 0, 0) and then going below the z-plane. *20*

Q7. (a) निम्नलिखित अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = (x-2)e^{2x}$$

जबकि e^x इसके संगत समघात अवकल समीकरण का एक हल है ।

Solve the following differential equation :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = (x-2)e^{2x},$$

when e^x is a solution to its corresponding homogeneous differential equation. *15*

(b) द्रव्यमान m का एक कण जो ऊर्ध्वाधर में एक स्थिर बिन्दु से एक हल्की अवितान्य (न खिंचने वाली) l लंबाई की डोरी से लटका हुआ है, को एक क्षैतिज आघात दिया जाता है जो कि उसको वेग $2\sqrt{gl}$ प्रदान करता है । कण का वेग तथा जब डोरी शैथिल्य हो जाए तब प्रारंभिक स्थान के स्तर से उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

A particle of mass m, hanging vertically from a fixed point by a light inextensible cord of length l, is struck by a horizontal blow which imparts to it a velocity $2\sqrt{gl}$. Find the velocity and height of the particle from the level of its initial position when the cord becomes slack. *15*

(c) एक सम पंचभुज (रेग्यूलर पैंटागन) ABCDE बराबर भारी एकसमान छड़ों को जोड़कर बनाया हुआ है, जोड़ A से लटक रहा है तथा BC एवं DE के मध्य बिन्दुओं को जोड़ते हुए एक हल्की छड़ के द्वारा वह अपने रूप में अनुरक्षित है । इस छड़ में प्रतिबल ज्ञात कीजिए ।

A regular pentagon ABCDE, formed of equal heavy uniform bars jointed together, is suspended from the joint A, and is maintained in form by a light rod joining the middle points of BC and DE. Find the stress in this rod. *20*

Q8. (a) अवकल समीकरण $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ के लिए पर्याप्त शर्त ज्ञात कीजिए ताकि उसका समाकलन गुणक, $(x + y)$ का फलन हो । उस दशा में समाकलन गुणक क्या होगा ? अतएव अवकल समीकरण $(x^2 + xy)\,dx + (y^2 + xy)\,dy = 0$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए तथा हल कीजिए ।

Find the sufficient condition for the differential equation $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ to have an integrating factor as a function of $(x + y)$. What will be the integrating factor in that case ? Hence find the integrating factor for the differential equation

$$(x^2 + xy)\,dx + (y^2 + xy)\,dy = 0,$$

and solve it. *15*

(b) एक कण पर y-अक्ष के समांतर एक बल लगा हुआ है, जिसका त्वरण (सदैव x-अक्ष की ओर) μy^{-2} है तथा जब $y = a$ है, तब x-अक्ष के समांतर वेग $\sqrt{\frac{2\mu}{a}}$ से प्रक्षेपित है । कण के पथ का प्राचलिक समीकरण ज्ञात कीजिए । यहाँ μ एक अचर है ।

A particle is acted on by a force parallel to the axis of y whose acceleration (always towards the axis of x) is μy^{-2} and when $y = a$, it is projected parallel to the axis of x with velocity $\sqrt{\frac{2\mu}{a}}$. Find the parametric equation of the path of the particle. Here μ is a constant. *15*

(c) प्रारंभिक मान समस्या

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 8\, e^{-2t} \sin t, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

को लाप्लास-रूपांतर के प्रयोग से हल कीजिए ।

Solve the initial value problem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 8\, e^{-2t} \sin t, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

by using Laplace-transform. *20*

CS (Main) Exam:2015

C–AVZ–O–NBUA

गणित

प्रश्न-पत्र—I

MATHEMATICS

Paper—I

निर्धारित समय : तीन घंटे	*अधिकतम अंक : 250*
Time Allowed : Three Hours	*Maximum Marks : 250*

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ (8) प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in Two Sections and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Question Nos. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each Section.*

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—अ

SECTION—A

Q. 1(a) दिए गए सदिश $V_1 = (1, 1, 2, 4)$, $V_2 = (2, -1, -5, 2)$, $V_3 = (1, -1, -4, 0)$ तथा $V_4 = (2, 1, 1, 6)$ रैखिकत : स्वतंत्र हैं। क्या यह सत्य है ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिये।

The vectors $V_1 = (1, 1, 2, 4)$, $V_2 = (2, -1, -5, 2)$, $V_3 = (1, -1, -4, 0)$ and $V_4 = (2, 1, 1, 6)$ are linearly independent. Is it true ? Justify your answer. 10

Q. 1(b) निम्नलिखित आव्यूह को पंक्ति सोपानक रूप में समानीत कीजिये और तत्पश्चात् इसकी कोटि निकालिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 14 & 17 \end{bmatrix}.$$

Reduce the following matrix to row echelon form and hence find its rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 14 & 17 \end{bmatrix}.$$ 10

Q. 1(c) निम्नलिखित सीमा का मान निकालिए :

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}.$$

Evaluate the following limit :

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}.$$ 10

Q. 1(d) निम्नलिखित समाकल का मान निकालिए :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}}\, dx.$$

Evaluate the following integral :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}}\, dx.$$ 10

Q. 1(e) 'a' के किस धनात्मक मान के लिए, समतल $ax - 2y + z + 12 = 0$, गोलक $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु को भी ज्ञात कीजिये।

For what positive value of a, the plane $ax - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ and hence find the point of contact. 10

Q. 2(a) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तब आव्यूह A^{30} को ज्ञात कीजिये।

If matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ then find A^{30}. 12

Q. 2(b) एक शंक्वाकार टेंट एक दत्त क्षमता का है। यदि उस टेंट में न्यूनतम कैनवास लगाना हो, तो उसकी ऊँचाई का उसके आधार की त्रिज्या पर अनुपात मालूम कीजिये।

A conical tent is of given capacity. For the least amount of Canvas required, for it, find the ratio of its height to the radius of its base. 13

Q. 2(c) निम्नलिखित आव्यूह के आइगन मानों एवं आइगन सदिशों को ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Find the eigen values and eigen vectors of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ 12

Q. 2(d) यदि शंकु $5yz - 8zx - 3xy = 0$ की तीन परस्पर लम्बवत् जनक रेखाओं में से एक जनक रेखा $6x = 3y = 2z$ हो, तब अन्य दो जनक रेखाओं के समीकरण मालूम कीजिये।

If $6x = 3y = 2z$ represents one of the three mutually perpendicular generators of the cone $5yz - 8zx - 3xy = 0$ then obtain the equations of the other two generators. 13

Q. 3(a) यदि $V = \mathbb{R}^3$ तथा $T \in A(V)$ जहाँ सभी a_i, $A(V)$ के सदस्य हैं। यदि

$$T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 5a_2 + a_3, -3a_1 + a_2 - a_3, -a_1 + 2a_2 + 3a_3)$$

के द्वारा परिभाषित हैं। तब आधार

$$V_1 = (1, 0, 1) \qquad V_2 = (-1, 2, 1) \qquad V_3 = (3, -1, 1)$$

के सापेक्ष आव्यूह T ज्ञात कीजिये।

Let $V = \mathbb{R}^3$ and $T \in A(V)$, for all $a_i \in A(V)$, be defined by

$$T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 5a_2 + a_3, -3a_1 + a_2 - a_3, -a_1 + 2a_2 + 3a_3)$$

What is the matrix T relative to the basis

$V_1 = (1, 0, 1)$ $V_2 = (-1, 2, 1)$ $V_3 = (3, -1, 1)$? 12

Q. 3(b) गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ पर स्थित बिन्दु निकालिए जो बिन्दु (2, 1, 3) से अधिकतम दूरी पर है।

Which point of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ is at the maximum distance from the point (2, 1, 3) ? 13

Q. 3(c) (i) उस समतल का समीकरण निकालिए जो बिन्दुओं (2, 3, 1) एवं (4, –5, 3) से गुजरता है व x-अक्ष के समान्तर है।

Obtain the equation of the plane passing through the points (2, 3, 1) and (4, –5, 3) parallel to x-axis. 6

(ii) सत्यापित कीजिये कि रेखाएँ :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

समतलीय हैं। यदि हाँ, तो उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमें उपरोक्त दोनों रेखाएँ स्थित हैं।

Verify if the lines :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \quad \text{and} \quad \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

are coplanar. If yes, then find the equation of the plane in which they lie. 7

Q. 3(d) निम्न समाकलन का मूल्यांकन करें :

$$\iint_R (x-y)^2 \cos^2(x+y)\, dx\, dy$$

जहाँ R एक समचतुर्भुज है, जिसके शीर्ष क्रमवार $(\pi, 0)$ $(2\pi, \pi)$ $(\pi, 2\pi)$ $(0, \pi)$ हैं।

Evaluate the integral

$$\iint_R (x-y)^2 \cos^2(x+y)\, dx\, dy$$

where R is the rhombus with successive vertices as $(\pi, 0)$ $(2\pi, \pi)$ $(\pi, 2\pi)$ $(0, \pi)$. 12

Q. 4(a) निम्नलिखित का मान निकालिए :

$$\iint_R \sqrt{|y-x^2|}\, dx\, dy$$

जहाँ R = [–1, 1 ; 0, 2].

Evaluate $\iint_R \sqrt{|y-x^2|}\, dx\, dy$

where R = [–1, 1 ; 0, 2]. 13

Q. 4(b) R^4 की उस उपसमष्टि की विमा ज्ञात कीजिये जो समुच्चय

{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 0, 0, 1)}

द्वारा विस्तारित है। तत्पश्चात् उसका आधार निकालिए।

Find the dimension of the subspace of R^4, spanned by the set

{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 0, 0, 1)}

Hence find its basis. 12

Q. 4(c) यदि परवलयज $x^2 + y^2 = 2z$ पर दो लम्बवत् स्पर्शीय समतल एक सीधी रेखा में, जो समतल x = 0 में, पर काटते हैं। उस वक्र को प्राप्त कीजिए जिस पर वह सीधी रेखा स्पर्श करती है।

Two perpendicular tangent planes to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2z$ intersect in a straight line in the plane x = 0. Obtain the curve to which this straight line touches. 13

Q. 4(d) दिए गए फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए सांतत्य एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिये।

For the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Examine the continuity and differentiability. 12

खण्ड—ब

SECTION—B

Q. 5(a) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिये :

$$x\cos x\frac{dy}{dx}+y(x\sin x+\cos x)=1.$$

Solve the differential equation :

$$x\cos x\frac{dy}{dx}+y(x\sin x+\cos x)=1.$$ 10

Q. 5(b) निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल निकालिये :

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0.$$

Solve the differential equation :

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0.$$ 10

Q. 5(c) एक पिंड, जो सरल आवर्त गति (एस.एच.एम.) कर रहा है, उसका आयाम 'a' व आवर्तकाल 'T' है। जब माध्य स्थिति से उसकी दूरी $\frac{2}{3}a$ हो, तब उसका वेग तिगुना कर दिया जाय, परंतु आवर्तकाल को न बदला जाए, तो उसका नया आयाम मालूम कीजिये।

A body moving under SHM has an amplitude 'a' and time period 'T'. If the velocity is trebled, when the distance from mean position is '$\frac{2}{3}a$', the period being unaltered, find the new amplitude. 10

Q. 5(d) 8 kg भार की एक छड़, ऊर्ध्वाधर तल में एक सिरे पर लगे कब्जे पर चलायमान है। उसके दूसरे सिरे पर लम्बाई l की एक रस्सी के द्वारा कब्जे से b ऊँचाई पर, ऊर्ध्व दिशा में छड़ के आधे के बराबर भार बाँधा गया है। रस्सी में तनाव ज्ञात कीजिये।

A rod of 8 kg is movable in a vertical plane about a hinge at one end, another end is fastened a weight equal to half of the rod, this end is fastened by a string of length l to a point at a height b above the hinge vertically. Obtain the tension in the string. 10

Q. 5(e) निम्न दो सतहों $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ तथा $z = x^2 + y^2 - 3$ के बीच बिन्दु (2, –1, 2) पर कोण ज्ञात कीजिये।

Find the angle between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at (2, –1, 2). 10

Q. 6(a) यदि $(x + y)^a$, निम्न अवकल समीकरण $(4x^2 + 2xy + 6y)dx + (2x^2 + 9y + 3x)dy = 0$ का समाकलन गुणांक है तो 'a' का मान मालूम कीजिये। तत्पश्चात् अवकल समीकरण का हल निकालिए।

Find the constant a so that $(x + y)^a$ is the Integrating factor of $(4x^2 + 2xy + 6y)dx + (2x^2 + 9y + 3x)dy = 0$ and hence solve the differential equation. 12

Q. 6(b) दो बराबर भार की सीढ़ियां, जिसमें प्रत्येक का भार 4 kg है, बिंदु A पर एक दूसरे के साथ झुकाकर रखी गई हैं। उनके दूसरे सिरे एक खुरदुरे फर्श पर हैं, जिसका घर्षण गुणांक μ है। दोनों सीढ़ी के बीच 60° का कोण है। कितना भार उस शीर्ष बिंदु A पर रखा जाए कि वह सीढ़ियों के फिसल जाने का कारण बन जाय।

Two equal ladders of weight 4 kg each are placed so as to lean at A against each other with their ends resting on a rough floor, given the coefficient of friction is μ. The ladders at A make an angle 60° with each other. Find what weight on the top would cause them to slip. 13

Q. 6(c) यदि दो पृष्ठ $\lambda x^2 - \mu yz = (\lambda + 2)x$ तथा $4x^2y + z^3 = 4$ बिन्दु $(1, -1, 2)$ पर लम्बवत् काटती हों, तो λ व μ का मान निकालिए।

Find the value of λ and μ so that the surfaces $\lambda x^2 - \mu yz = (\lambda + 2)x$ and $4x^2y + z^3 = 4$ may intersect orthogonally at $(1, -1, 2)$. 12

Q. 6(d) एक पिंड, बल के केंद्र से अन्तर्गत, जो दूरी के विलोमानुपाती आकर्षित करता है; 'a' दूरी से विरामअवस्था से चलना शुरू करता है। उसका केन्द्र पर आगमन का समय मालूम कीजिये।

A mass starts from rest at a distance 'a' from the centre of force which attracts inversely as the distance. Find the time of arriving at the centre. 13

Q. 7(a) (i) निम्नलिखित का लाप्लास विलोम रूपांतर प्राप्त कीजिये :

$$\left\{\ell n\left(1+\frac{1}{s^2}\right)+\frac{s}{s^2+25}e^{-\pi s}\right\}.$$

(ii) लाप्लास रूपांतर का प्रयोग करके, निम्नलिखित

$$y'' + y = t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

का हल निकालिए।

(i) Obtain Laplace Inverse transform of

$$\left\{\ell n\left(1+\frac{1}{s^2}\right)+\frac{s}{s^2+25}e^{-\pi s}\right\}.$$

(ii) Using Laplace transform, solve

$$y'' + y = t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$$

6+6=12

Q. 7(b) एक कण, एक ऐसी पहाड़ी के आधार पर एक बिन्दु से, प्रक्षेपित किया जाता है, जिसकी प्रवणता एक लम्ब वृत्ताकार शंकु की है जिसकी अक्षीय रेखा ऊर्ध्वाधर है। प्रक्षेप शंकु के शीर्षबिन्दु छूते हुए व पहाड़ी के आधार पर किसी दूसरे बिन्दु से जा टकराता है। यदि शंकु का अर्धशीर्ष कोण 30° व ऊँचाई h हो, तो प्रक्षेप का प्रारंभिक वेग u व उसका प्रक्षेप कोण निर्धारण कीजिये।

A particle is projected from the base of a hill whose slope is that of a right circular cone, whose axis is vertical. The projectile grazes the vertex and strikes the hill again at a point on the base. If the semivertical angle of the cone is 30°, h is height, determine the initial velocity u of the projection and its angle of projection. 13

Q. 7(c) एक सदिश क्षेत्र

$$\vec{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}$$

के दिया गया है। सत्यापित कीजिए कि यह क्षेत्र $\vec{F}$ अघूर्णी है या नहीं। अत: अदिश विभव ज्ञात कीजिये।

A vector field is given by

$$\vec{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}$$

Verify that the field $\vec{F}$ is irrotational or not. Find the scalar potential. 12

Q. 7(d) अवकल समीकरण

$$x = py - p^2$$

का हल निकालिए, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$.

Solve the differential equation

$$x = py - p^2 \text{ where } p = \frac{dy}{dx}.$$ 13

Q. 8(a) उस अंतहीन शृंखला की लम्बाई ज्ञात कीजिये, जो एक 'a' त्रिज्य वाली वृत्तीय घिरनी पर इस तरह से टंगी है, कि वह उस घिरनी के दो-तिहाई परिधि के स्पर्श में रहे।

Find the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius 'a' so as to be in contact with the two-thirds of the circumference of the pulley. 12

Q. 8(b) एक कण, एक बल के अधीन, एक नियत केन्द्र की ओर जो दूरी के समानुपाती है, पर चलता है। यदि कण के मार्ग के दो एपसाइडल दूरियाँ a, b हैं (a > b), तब मार्ग का समीकरण ज्ञात करो।

A particle moves in a plane under a force, towards a fixed centre, proportional to the distance. If the path of the particle has two apsidal distances a, b (a > b), then find the equation of the path. 13

Q. 8(c) निम्नलिखित का मान निकालिए

$$\int_C e^{-x}(\sin y \, dx + \cos y \, dy)$$

जहाँ C एक आयत है, जिसके (0, 0), (π, 0), $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ शीर्ष हैं।

Evaluate $\int_C e^{-x}(\sin y \, dx + \cos y \, dy)$, where C is the rectangle with vertices (0, 0), (π, 0), $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 12

Q. 8(d) निम्न अवकल समीकरण को हल करें :

$$x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 6x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 + 2\cos(\log_e x) .$$

Solve :

$$x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 6x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 + 2\cos(\log_e x) .$$ 13

CS (MAIN) Exam:2016

M–ESC–U–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* *(i)* यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया (elementary row operation) के प्रयोग से A^{-1} निकालिये।

Using elementary row operations, find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 6

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ है, तो $A^{14} + 3A - 2I$ का मान निकालिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, then find $A^{14} + 3A - 2I$. 4

(b) *(i)* प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया (elementary row operation) के प्रयोग से वह शर्त निकालिये, जिससे कि प्रथम-घातीय समीकरणों (linear equations)

$$x - 2y + z = a$$
$$2x + 7y - 3z = b$$
$$3x + 5y - 2z = c$$

का एक हल हो।

Using elementary row operations, find the condition that the linear equations

$$x - 2y + z = a$$
$$2x + 7y - 3z = b$$
$$3x + 5y - 2z = c$$

have a solution. 7

(ii) यदि

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + y - 2z = 0\}$$
$$W_3 = \{(x, y, z) \mid x - 7y + 3z = 0\}$$

तो $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ तथा $\dim(W_1 + W_2)$ का मान निकालिये।

If

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + y - 2z = 0\}$$
$$W_3 = \{(x, y, z) \mid x - 7y + 3z = 0\}$$

then find $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ and $\dim(W_1 + W_2)$. 3

(c) मान निकालिये :

Evaluate : 10

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x \log\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$$

(d) उस गोले (sphere) का समीकरण निकालिये, जो वृत्त $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$ से गुजरता है और जो तल $x + 2y + 2z = 0$ से एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 3 है, में काटा जाता है।

Find the equation of the sphere which passes through the circle $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$ and is cut by the plane $x + 2y + 2z = 0$ in a circle of radius 3. 10

(e) रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = z-3$ तथा $y - mx = z = 0$ के बीच लघुतम दूरी (shortest distance) निकालिये। m के किस मान के लिए दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद (intersect) करेंगी?

Find the shortest distance between the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = z-3$ and $y - mx = z = 0$. For what value of m will the two lines intersect? 10

2. (a) (i) यदि $M_2(R)$, 2×2 कोटि (order) के वास्तविक आव्यूहों की समष्टि (space) तथा $P_2(x)$, वास्तविक बहुपदों (polynomials), जिनकी अधिकतम घात (degree) 2 है, की समष्टि (space) हो, तो $T : M_2(R) \to P_2(x)$, जहाँ $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + c + (a-d)\,x + (b+c)x^2$, का $M_2(R)$ एवं $P_2(x)$ के मानक आधारों (standard bases) के सापेक्ष आव्यूह निरूपित कीजिये। इसके अलावा T का शून्य समष्टि (null space) प्राप्त कीजिये।

If $M_2(R)$ is space of real matrices of order 2×2 and $P_2(x)$ is the space of real polynomials of degree at most 2, then find the matrix representation of $T : M_2(R) \to P_2(x)$, such that $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + c + (a-d)\,x + (b+c)x^2$, with respect to the standard bases of $M_2(R)$ and $P_2(x)$. Further find the null space of T. 10

(ii) यदि $T : P_2(x) \to P_3(x)$ इस प्रकार है कि $T(f(x)) = f(x) + 5\int_0^x f(t)\, dt$, तो $\{1,\ 1+x,\ 1-x^2\}$ एवं $\{1, x, x^2, x^3\}$ को क्रमशः $P_2(x)$ एवं $P_3(x)$ का आधार (bases) लेते हुए T का आव्यूह निकालिये।

If $T : P_2(x) \to P_3(x)$ is such that $T(f(x)) = f(x) + 5\int_0^x f(t)\, dt$, then choosing $\{1,\ 1+x,\ 1-x^2\}$ and $\{1, x, x^2, x^3\}$ as bases of $P_2(x)$ and $P_3(x)$ respectively, find the matrix of T. 6

(b) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A के अभिलक्षणिक मान (eigenvalues) तथा अभिलक्षणिक सदिशों (eigenvectors) को निकालिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find the eigenvalues and eigenvectors of A. 8

(ii) सिद्ध कीजिये कि हर्मिटी (Hermitian) आव्यूह के सभी अभिलक्षणिक मान वास्तविक हैं।

Prove that eigenvalues of a Hermitian matrix are all real. 8

(c) यदि आधारों (bases) $\{1-x, x(1-x), x(1+x)\}$ एवं $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण (linear transformation) $T: P_2(x) \to P_2(x)$ के तहत आव्यूह निरूपण $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो T प्राप्त कीजिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ is the matrix representation of a linear transformation $T: P_2(x) \to P_2(x)$ with respect to the bases $\{1-x, x(1-x), x(1+x)\}$ and $\{1, 1+x, 1+x^2\}$, then find T. 18

3. (a) $x^2+y^2+z^2$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिये, जहाँ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ तथा $x+y-z=0$ हो।

Find the maximum and minimum values of $x^2+y^2+z^2$ subject to the conditions $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ and $x+y-z=0$. 20

(b) मान लीजिये

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y-5x^2y^2+y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\delta > 0$ प्राप्त कीजिये इस प्रकार कि $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, जब $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ हो।

Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y - 5x^2y^2 + y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Find a $\delta > 0$ such that $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, whenever $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. 15

(c) तल $x + 2y + 2z = 12$ के $x = 0$, $y = 0$ तथा $x^2 + y^2 = 16$ द्वारा काटे गये क्षेत्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) निकालिये।

Find the surface area of the plane $x + 2y + 2z = 12$ cut off by $x = 0$, $y = 0$ and $x^2 + y^2 = 16$. 15

4. *(a)* एक रेखा, जो रेखाओं $y = a = z$, $x + 3z = a = y + z$ को प्रतिच्छेद (intersect) करती है तथा तल $x + y = 0$ के समानान्तर है, द्वारा जनित सतह (surface generated) निकालिये।

Find the surface generated by a line which intersects the lines $y = a = z$, $x + 3z = a = y + z$ and parallel to the plane $x + y = 0$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि शंकु (cone) $3yz - 2zx - 2xy = 0$ के तीन परस्पर लम्बीय जनकों (generators) का एक अनन्त समुच्चय है। यदि $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ ऐसे किसी समुच्चय का एक जनक (generator) हो, तो बाकी दो निकालिये।

Show that the cone $3yz - 2zx - 2xy = 0$ has an infinite set of three mutually perpendicular generators. If $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ is a generator belonging to one such set, find the other two. 10

(c) $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ का मान निकालिये, जहाँ आयत $R = [0, 1; 0, 1]$ तथा

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{यदि } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है।

Evaluate $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ over the rectangle $R = [0, 1; 0, 1]$ where

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

15

(d) शांकवज (conicoid) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के तीन पारस्परिक लम्बीय स्पर्शी तलों के प्रतिच्छेदन बिन्दु का बिन्दुपथ निकालिये।

Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. 15

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=e^{x/2}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ का विशेष समाकल (particular integral) निकालिये।

Find a particular integral of $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=e^{x/2}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि सदिश $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k},\ \vec{b}=-\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k},\ \vec{c}=4\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$ एक त्रिभुज की भुजाएँ बना सकते हैं। इस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाई निकालिये।

Prove that the vectors $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k},\ \vec{b}=-\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k},\ \vec{c}=4\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$ can form the sides of a triangle. Find the lengths of the medians of the triangle. 10

(c) हल कीजिये :

Solve : 10

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}(e^{\tan^{-1}x}-y)$$

(d) दर्शाइये कि परवलय-कुल $y^2=4cx+4c^2$ स्वलांबिक (self-orthogonal) है।

Show that the family of parabolas $y^2=4cx+4c^2$ is self-orthogonal. 10

(e) एक कण केन्द्रीय त्वरण (central acceleration), जो दूरी के त्रिघात के व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) है, के तहत चलायमान है। यदि इसे मूलबिन्दु (origin) से दूरी a पर एक स्तब्धिका (apse) से उस वेग से प्रक्षेपित किया जाता है, जो कि a त्रिज्या के वृत्त के वेग का $\sqrt{2}$ गुना है, तो पथ का समीकरण निकालिये।

A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance. If it is projected from an apse at a distance a from the origin with a velocity which is $\sqrt{2}$ times the velocity for a circle of radius a, then find the equation to the path. 10

6. *(a)* हल कीजिये :

Solve : 10

$$\{y(1-x\tan x)+x^2\cos x\}\,dx-x\,dy=0$$

(b) अवकल समीकरण (differential equation)

$$(D^2+2D+1)\,y=e^{-x}\log(x), \qquad \left[D\equiv\frac{d}{dx}\right]$$

को प्राचल-विचरण (variation of parameters) विधि से हल कीजिये।

Using the method of variation of parameters, solve the differential equation

$$(D^2 + 2D + 1)\, y = e^{-x} \log(x), \qquad \left[D \equiv \frac{d}{dx}\right]$$ 15

(c) समीकरण $x^2 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} = 4$ का व्यापक हल (general solution) निकालिये।

Find the general solution of the equation $x^2 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} = 4$. 15

(d) लाप्लास रूपांतरण (Laplace transformation) की मदद से निम्न का हल निकालिये :

Using Laplace transformation, solve the following : 10

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6$$

7. (a) $2a$ लम्बाई की एकसमान एक छड़ (rod) AB, A पर हिन्ज (hinge) के परितः चलायमान (movable) है, जिसका दूसरा छोर एक चिकनी ऊर्ध्व दीवार पर स्थित है। यदि छड़ का ऊर्ध्वाधर से झुकाव α हो, तो सिद्ध कीजिये कि हिन्ज (hinge) पर प्रतिक्रिया (reaction) का परिमाण $\frac{1}{2}W\sqrt{4+\tan^2\alpha}$ है, जहाँ W छड़ का भार है।

A uniform rod AB of length $2a$ movable about a hinge at A rests with other end against a smooth vertical wall. If α is the inclination of the rod to the vertical, prove that the magnitude of reaction of the hinge is

$$\frac{1}{2}W\sqrt{4+\tan^2\alpha}$$

where W is the weight of the rod. 15

(b) दो भार P तथा Q एक स्थिर (fixed) बिन्दु O से धागे (strings) OA एवं OB से लटके हैं तथा एक हल्के छड़ (rod) AB द्वारा एक-दूसरे से अलग किये गये हैं। यदि धागे OA एवं OB छड़ (rod) AB से क्रमशः α तथा β कोण बनाते हों, तो सिद्ध कीजिये कि छड़ (rod) ऊर्ध्व दिशा से θ कोण बनाती है, जहाँ

$$\tan\theta = \frac{P+Q}{P\cot\alpha - Q\cot\beta}$$

Two weights P and Q are suspended from a fixed point O by strings OA, OB and are kept apart by a light rod AB. If the strings OA and OB make angles α and β with the rod AB, show that the angle θ which the rod makes with the vertical is given by

$$\tan\theta = \frac{P+Q}{P\cot\alpha - Q\cot\beta}$$ 15

(c) एक वर्ग $ABCD$, जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है, को एक ऊर्ध्व तल (vertical plane) में स्थिर (fixed) किया जाता है, जिसकी दो भुजाएँ क्षैतिज हैं। एक अन्तहीन धागा (endless string), जिसकी लंम्बाई $l(>4a)$ है, बोर्ड के कोणों पर स्थित चार खूँटियों के ऊपर से एक रिंग (ring) के द्वारा गुजरता है। रिंग का भार W है और यह ऊर्ध्व दिशा में लटक रहा है। दर्शाइये कि धागे का तनाव $\dfrac{W(l-3a)}{2\sqrt{l^2-6la+8a^2}}$ है।

A square $ABCD$, the length of whose sides is a, is fixed in a vertical plane with two of its sides horizontal. An endless string of length $l(>4a)$ passes over four pegs at the angles of the board and through a ring of weight W which is hanging vertically. Show that the tension of the string is $\dfrac{W(l-3a)}{2\sqrt{l^2-6la+8a^2}}$. 20

8. (a) $f(r)$ निकालिये, इस प्रकार कि $\nabla f = \dfrac{\vec{r}}{r^5}$ तथा $f(1)=0$ हो।

Find $f(r)$ such that $\nabla f = \dfrac{\vec{r}}{r^5}$ and $f(1)=0$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि

Prove that

$$\oint_C f\, d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla f$$ 10

(c) एक कण एक सरल रेखा में गतिमान है। इसका त्वरण सरल रेखा पर एक स्थिर (fixed) बिन्दु O की तरफ निर्देशित है तथा हमेशा $\mu\left(\dfrac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$ के बराबर है, जब यह बिन्दु O से x दूरी पर है। यदि यह बिन्दु O से a दूरी पर शून्य वेग से गतिमान होता है, तो वह समय निकालिये जब कण O पर आएगा।

A particle moves in a straight line. Its acceleration is directed towards a fixed point O in the line and is always equal to $\mu\left(\dfrac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$ when it is at a distance x from O. If it starts from rest at a distance a from O, then find the time, the particle will arrive at O. 15

(d) दर्शाइये कि कार्डिऑइड (cardioid) $r = a(1+\cos\theta)$ के किसी बिन्दु (r, θ) पर वक्रता-त्रिज्या (radius of curvature) का वर्ग r के समानुपाती है। $\theta = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}$ पर वक्रता-त्रिज्या भी ज्ञात कीजिये।

For the cardioid $r = a(1+\cos\theta)$, show that the square of the radius of curvature at any point (r, θ) is proportional to r. Also find the radius of curvature if $\theta = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}$. 15

★★★

CS (MAIN) Exam : 2017

वियोज्य DETACHABLE

गणित (प्रश्न-पत्र I)

MATHEMATICS (Paper I)

समय : तीन घण्टे Time Allowed : Three Hours	अधिकतम अंक : 250 Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खंडों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **Two Sections** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ । एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P ज्ञात कीजिए ताकि $P^{-1}AP$ एक विकर्ण-आव्यूह हो ।

Let $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Find a non-singular matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. 10

1.(b) दर्शाइए कि समरूप आव्यूहों के समान अभिलक्षणिक बहुपद होते हैं ।

Show that similar matrices have the same characteristic polynomial. 10

1.(c) प्रान्त $R: \{-3 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 3,\ 1 \leqslant xy \leqslant 4\}$ पर फलन $f(x,\ y) = xy\,(x^2 + y^2)$ का समाकलन कीजिए ।

Integrate the function $f(x,\ y) = xy\,(x^2 + y^2)$ over the domain $R: \{-3 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 3,$ $1 \leqslant xy \leqslant 4\}$. 10

1.(d) बिन्दु (1, 1, 1) पर शांकवज $3x^2 - y^2 = 2z$ के स्पर्श-तल का समीकरण निकालिए ।

Find the equation of the tangent plane at point (1, 1, 1) to the conicoid $3x^2 - y^2 = 2z$. 10

1.(e) विषमतलीय रेखाओं $\frac{x-3}{3} = \frac{8-y}{1} = \frac{z-3}{1}$ व $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ के बीच न्यूनतम-दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the shortest distance between the skew lines :

$\frac{x-3}{3} = \frac{8-y}{1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$. 10

2.(a) xy-तल के ऊपर के और ठीक नीचे के दीर्घवृत्तीय पैराबोलौएड $x^2 + \frac{y^2}{4} = z$, जो समतल $z = 9$ से कटा हुआ है, का आयतन मालूम कीजिए ।

Find the volume of the solid above the xy-plane and directly below the portion of the elliptic paraboloid $x^2 + \frac{y^2}{4} = z$ which is cut off by the plane $z = 9$. 15

2.(b) एक समतल, नियत बिन्दु (a, b, c) में से गुज़रता है तथा अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A, B व C पर काटता है । मूल बिन्दु O तथा A, B व C में से गुज़रने वाले गोले के केन्द्र का बिन्दु-पथ ज्ञात कीजिए ।

A plane passes through a fixed point $(a,\ b,\ c)$ and cuts the axes at the points $A,\ B,\ C$ respectively. Find the locus of the centre of the sphere which passes through the origin O and $A,\ B,\ C$. 15

2.(c) दर्शाइए कि समतल $2x - 2y + z + 12 = 0$, गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$, को स्पर्श करता है । सम्पर्क बिन्दु ज्ञात कीजिए ।

Show that the plane $2x - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$. Find the point of contact. 10

2.(d) मान लीजिए कि U व W सदिश समष्टि V के चार सुस्पष्ट विमीय उप-आकाश जहाँ पर विमा $V = 6$ । उप-आकाश $(U \cap W)$ की सम्भावित विमाएँ ज्ञात कीजिए ।

Suppose U and W are distinct four dimensional subspaces of a vector space V, where dim $V = 6$. Find the possible dimensions of subspace $U \cap W$. 10

3.(a) विचारिए आव्यूह-प्रतिरूपण $A : R^4 \to R^3$ है, जहाँ पर $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ । A की प्रतिछाया की विमा व एक आधार तथा कर्नल A की विमा व एक आधार भी ज्ञात कीजिए ।

Consider the matrix mapping $A : R^4 \to R^3$, where $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}$. Find a basis and dimension of the image of A and those of the kernel A. 15

3.(b) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह के विभिन्न अशून्य-अभिलक्षणिक सदिश रैखिक स्वतंत्र होते हैं ।

Prove that distinct non-zero eigenvectors of a matrix are linearly independent. 10

3.(c) यदि $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

तब $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ व $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ की (0, 0) का परिकलन कीजिए ।

If $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

calculate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ and $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ at (0, 0). 15

3.(d) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के तीन परस्पर लम्बवत् स्पर्शतलों के प्रतिच्छेदन बिन्दु का बिन्दु-पथ ज्ञात कीजिए ।

Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. 10

4.(a) समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy - 3x - 6y - 9z + 21 = 0$ को प्रमाणिक-रूप में व्यक्त कीजिए अतः शांकवज की प्रकृति निर्धारित कीजिए ।

Reduce the following equation to the standard form and hence determine the nature of the conicoid : $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy - 3x - 6y - 9z + 21 = 0$. 15

4.(b) x, y, z में समीकरणों के निम्नलिखित निकाय को विचारिए :

$$x + 2y + 2z = 1$$
$$x + ay + 3z = 3$$
$$x + 11y + az = b$$

(i) a के किन मानों के लिए निकाय का एकल-हल है ?

(ii) युग्म जोड़ों (a, b) के किन मानों के लिए समुदाय के एक से अधिक हल हैं ?

Consider the following system of equations in x, y, z :

$$x + 2y + 2z = 1$$
$$x + ay + 3z = 3$$
$$x + 11y + az = b.$$

(i) For which values of a does the system have a unique solution ?

(ii) For which pair of values (a, b) does the system have more than one solution ? 15

4.(c) परीक्षण कीजिए कि क्या अनंत समाकल $\int_0^3 \frac{2xdx}{\left(1-x^2\right)^{2/3}}$ का अस्तित्व है ।

Examine if the improper integral $\int_0^3 \frac{2xdx}{\left(1-x^2\right)^{2/3}}$ exists. 10

4.(d) सिद्ध कीजिए कि $\frac{\pi}{3} \leqslant \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \leqslant \pi$ जहाँ पर D एकक डिस्क है ।

Prove that $\frac{\pi}{3} \leqslant \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \leqslant \pi$ where D is the unit disc. 10

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) x-y समतल में सभी वृत्तों को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation representing all the circles in the x-y plane. 10

5.(b) मान लीजिए किसी द्रव्य-प्रवाह की धारा-रेखाएं, वक्र समुदाय $xy = c$ के द्वारा प्रदर्शित हैं । सम-विभव रेखाओं, अर्थात् धारा-रेखाओं को प्रदर्शित करने वाले वक्र-समुदाय के लंबकोणीय संवेदियों को ज्ञात कीजिए ।

Suppose that the streamlines of the fluid flow are given by a family of curves $xy = c$. Find the equipotential lines, that is, the orthogonal trajectories of the family of curves representing the streamlines. 10

5.(c) एक तार, कार्डिऑइड $r = a(1 + \cos\theta)$, जिसकी प्रारम्भिक रेखा अधोगत ऊर्ध्वाधर है, के आकार में स्थिर है । m द्रव्यमान का एक छोटा छल्ला तार पर फिसल सकता है तथा कार्डिऑइड के बिन्दु $r = 0$ से स्वाभाविक लम्बाई a की प्रत्यास्थ (elastic) डोरी से, जिसका प्रत्यास्थता गुणांक 4 mg है, बंधा है । छल्ले को विरामावस्था से, जबकि डोरी क्षैतिज है, छोड़ा जाता है । ऊर्जा-संरक्षण के नियमों का प्रयोग कर दर्शाइये कि $a\dot{\theta}^2(1 + \cos\theta) - g\cos\theta\,(1 - \cos\theta) = 0$, g गुरुत्वाकर्षण के कारण त्वरण है ।

A fixed wire is in the shape of the cardiod $r = a(1 + \cos\theta)$, the initial line being the downward vertical. A small ring of mass m can slide on the wire and is attached to the point $r = 0$ of the cardiod by an elastic string of natural length a and modulus of elasticity 4 mg. The string is released from rest when the string is horizontal. Show by using the laws of conservation of energy that
$a\dot{\theta}^2(1 + \cos\theta) - g\cos\theta\,(1 - \cos\theta) = 0$, g being the acceleration due to gravity. 10

5.(d) स्थिरांकों a, b व c के किन मानों के लिए सदिश
$\overline{V} = (x + y + az)\,\hat{i} + (bx + 2y - z)\,\hat{j} + (-x + cy + 2z)\,\hat{k}$ अघूर्णी है । इन मानों के साथ इस सदिश के बेलनी-निर्देशांकों में अपसारिता ज्ञात कीजिए ।

For what values of the constants a, b and c the vector
$\overline{V} = (x + y + az)\,\hat{i} + (bx + 2y - z)\,\hat{j} + (-x + cy + 2z)\,\hat{k}$ is irrotational. Find the divergence in cylindrical coordinates of this vector with these values. 10

5.(e) समय t पर एक गतिमान बिन्दु का स्थिति सदिश $\overline{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2 + 2t)\,\hat{k}$ है । इसके त्वरण $\overline{a}$ के अवयव वेग-सदिश $\overline{v}$ के समान्तर दिशा में तथा $\overline{r}$ व $\overline{v}$ के तल के लम्बवत् दिशा में समय $t = 0$ पर ज्ञात कीजिए ।

The position vector of a moving point at time t is $\overline{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2 + 2t)\,\hat{k}$. Find the components of acceleration $\overline{a}$ in the directions parallel to the velocity vector $\overline{v}$ and perpendicular to the plane of $\overline{r}$ and $\overline{v}$ at time $t = 0$. 10

6.(a) (i) निम्नलिखित युगपत रेखीय अवकल समीकरणों को हल कीजिए :
$(D+1)y = z + e^x$ व $(D+1)z = y + e^x$, जहाँ y व z स्वतंत्र चर x के फलन हैं तथा $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ ।

(i) Solve the following simultaneous linear differential equations :
$(D+1)y = z + e^x$ and $(D+1)z = y + e^x$ where y and z are functions of independent variable x and $D \equiv \dfrac{d}{dx}$. 8

6.(a) (ii) यदि किसी भी समय t पर बैक्टीरिया संख्या की वृद्धि दर उस समय विद्यमान संख्या के समानुपाती है तथा संख्या एक सप्ताह में दो गुणी हो जाती है तब 4 सप्ताह के बाद बैक्टीरिया की कितनी संख्या अपेक्षित है ?

(ii) If the growth rate of the population of bacteria at any time t is proportional to the amount present at that time and population doubles in one week, then how much bacterias can be expected after 4 weeks ? 8

6.(b) (i) अवकल समीकरण : $xy\,p^2-(x^2+y^2-1)\,p+xy=0$, जहाँ पर $p=\dfrac{dy}{dx}$ है, पर विचार कीजिए। $u=x^2$ तथा $v=y^2$ द्वारा प्रतिस्थापन कर क्लेराउट्स रूप (Clairaut's form) में u, v तथा $p'=\dfrac{dv}{du}$ में व्यक्त कीजिए। अतएव या अन्यथा समीकरण को हल कीजिए।

(i) Consider the differential equation $xy\,p^2-(x^2+y^2-1)\,p+xy = 0$ where $p=\dfrac{dy}{dx}$. Substituting $u=x^2$ and $v=y^2$ reduce the equation to Clairaut's form in terms of u, v and $p'=\dfrac{dv}{du}$. Hence, or otherwise solve the equation. 10

6.(b) (ii) निम्नलिखित प्रारम्भिक-मान अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

$20y''+4y'+y=0,\; y(0)=3\cdot2$ व $y'(0)=0$ ।

(ii) Solve the following initial value differential equations :

$20y''+4y'+y=0,\; y(0)=3\cdot2$ and $y'(0)=0$. 7

6.(c) एक एकसमान अर्धगोला, क्षैतिज से ϕ कोण पर झुके हुए रुक्ष समतल पर अपने वक्रीय पृष्ठ को समतल से स्पर्श करते हुए रखा है। सन्तुलन के लिए ϕ का अधिकतम ग्राह्य मान निकालिए। यदि ϕ का मान इससे कम है तब क्या यह साम्यावस्था स्थिर है ?

A uniform solid hemisphere rests on a rough plane inclined to the horizon at an angle ϕ with its curved surface touching the plane. Find the greatest admissible value of the inclination ϕ for equilibrium. If ϕ be less than this value, is the equilibrium stable ? 17

7.(a) वक्र $\bar{r}=(a\cos\theta,\; a\sin\theta,\; a\theta)$ के किसी भी बिन्दु $\bar{r}=(\theta)$ पर वक्रता-सदिश व इसका परिमाण निकालिए। दर्शाइये कि मूल बिन्दु से स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्बपाद का बिन्दु-पथ एक वक्र है जो पूर्णरूप से अतिपरवलयज $x^2+y^2-z^2=a^2$ पर स्थित है।

Find the curvature vector and its magnitude at any point $\bar{r}=(\theta)$ of the curve $\bar{r}=(a\cos\theta,\; a\sin\theta,\; a\theta)$. Show that the locus of the feet of the perpendicular from the origin to the tangent is a curve that completely lies on the hyperboloid $x^2+y^2-z^2=a^2$. 16

7.(b) (i) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-4x^3y=8x^3\sin(x^2) \text{ ।}$$

(i) Solve the differential equation :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-4x^3y=8x^3\sin(x^2).$$ 9

7.(b) (ii) निम्नलिखित अवकल समीकरण को प्राचल-विचरण विधि के द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=44-76x-48x^2 \text{ ।}$$

(ii) Solve the following differential equation using method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=44-76x-48x^2.$$ 8

7.(c) एक कण त्रिज्या a के चिकनी ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार तार पर चलने में स्वतंत्र है । प्रारम्भिक समय $t=0$ पर इसे वृत्त के निम्नतम बिन्दु A से ऐसे वेग से, वृत्त के अनुदिश फेंका जाता है जो इसे मात्र उच्चतम बिन्दु B तक ले जाने में ही सक्षम है । समय T को ज्ञात कीजिए जिस पर कण व तार के बीच प्रतिक्रिया शून्य हो ।

A particle is free to move on a smooth vertical circular wire of radius a. At time $t=0$ it is projected along the circle from its lowest point A with velocity just sufficient to carry it to the highest point B. Find the time T at which the reaction between the particle and the wire is zero. 17

8.(a) W ग्राम भार व r त्रिज्या का एक गोला R से.मी. त्रिज्या की बेलनाकार बाल्टी की तली पर स्थित है । बाल्टी में h से.मी. $(h>2r)$ की गहराई तक पानी भरा हुआ है । दर्शाइये कि गोले को पानी की सतह के ठीक ऊपर लाने में किया गया न्यूनतम कार्य $\left[W\left(h-\frac{4r^3}{3R^2}\right)+W'\left(r-h+\frac{2r^3}{3R^2}\right)\right]$ से.मी. ग्राम होना चाहिए । W' ग्राम गोले द्वारा विस्थापित पानी का भार है ।

A spherical shot of W gm weight and radius r cm, lies at the bottom of cylindrical bucket of radius R cm. The bucket is filled with water up to a depth of h cm $(h>2r)$. Show that the minimum amount of work done in lifting the shot just clear of the water must be $\left[W\left(h-\frac{4r^3}{3R^2}\right)+W'\left(r-h+\frac{2r^3}{3R^2}\right)\right]$ cm gm. W' gm is the weight of water displaced by the shot. 16

8.(b) निम्नलिखित प्रारम्भिक-मान समस्या को लैपलास रूपान्तरण के द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+9y=r(x), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=4$$

जहाँ पर $r(x)=\begin{cases} 8\sin x & \text{यदि } 0<x<\pi \\ 0 & \text{यदि } x\geqslant\pi \end{cases}$

Solve the following initial value problem using Laplace transform :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+9y=r(x), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=4$$

where $r(x)=\begin{cases} 8\sin x & \text{if } 0<x<\pi \\ 0 & \text{if } x\geqslant\pi \end{cases}$ 17

8.(c) (i) समाकलन $\iint_S \overline{F}\cdot\hat{n}ds$ का अभिसरण प्रमेय से हल कीजिए :

जहाँ पर $\overline{F}=3xy^2\,\hat{i}+\left(yx^2-y^3\right)\hat{j}+3zx^2\,\hat{k}$

तथा S बेलन $y^2+z^2\leqslant 4, -3\leqslant x\leqslant 3$ का पृष्ठ है ।

(i) Evaluate the integral : $\iint_S \overline{F}\cdot\hat{n}ds$ where $\overline{F}=3xy^2\,\hat{i}+\left(yx^2-y^3\right)\hat{j}+3zx^2\,\hat{k}$ and S is a surface of the cylinder $y^2+z^2\leqslant 4, -3\leqslant x\leqslant 3$, using divergence theorem. 9

8.(c) (ii) ग्रीन्स प्रमेय का प्रयोग कर $\int_C F(\overline{r})\cdot d\overline{r}$ का वामावर्ती दिशा में मूल्यांकन कीजिए :

जहाँ पर $F(\overline{r})=\left(x^2+y^2\right)\hat{i}+\left(x^2-y^2\right)\hat{j}$

तथा $d\overline{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}$ और वक्र C, क्षेत्र $R=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2-x^2\right\}$ की परिधि है ।

(ii) Using Green's theorem, evaluate the $\int_C F(\overline{r})\cdot d\overline{r}$ counterclockwise where $F(\overline{r})=\left(x^2+y^2\right)\hat{i}+\left(x^2-y^2\right)\hat{j}$ and $d\overline{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}$ and the curve C is the boundary of the region $R=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2-x^2\right\}$. 8

CS (MAIN) EXAM:2018

EGT–P–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशिष्ट अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* मान लीजिये कि A एक 3×2 आव्यूह है और B एक 2×3 आव्यूह है। दर्शाइये कि $C = A \cdot B$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

Let A be a 3×2 matrix and B a 2×3 matrix. Show that $C = A \cdot B$ is a singular matrix. 10

(b) आधार सदिशों $e_1 = (1, 0)$ और $e_2 = (0, 1)$ को $\alpha_1 = (2, -1)$ एवं $\alpha_2 = (1, 3)$ के रैखिक संयोग के रूप में व्यक्त कीजिये।

Express basis vectors $e_1 = (1, 0)$ and $e_2 = (0, 1)$ as linear combinations of $\alpha_1 = (2, -1)$ and $\alpha_2 = (1, 3)$. 10

(c) निर्धारित कीजिये कि $\lim_{z \to 1} (1-z) \tan \frac{\pi z}{2}$ का अस्तित्व है या कि नहीं। अगर यह सीमा विद्यमान है, तो इसका मान ज्ञात कीजिये।

Determine if $\lim_{z \to 1} (1-z) \tan \frac{\pi z}{2}$ exists or not. If the limit exists, then find its value. 10

(d) सीमा $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - r^2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

Find the limit $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - r^2}$. 10

(e) सरल रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ का समतल $x + y + 2z = 6$ पर प्रक्षेपण ज्ञात कीजिये।

Find the projection of the straight line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ on the plane $x + y + 2z = 6$. 10

2. *(a)* अगर A और B समरूप $n \times n$ आव्यूह हैं, तो दर्शाइये कि उनके आइगेन मान एक ही हैं।

Show that if A and B are similar $n \times n$ matrices, then they have the same eigenvalues. 12

(b) बिन्दु $(1, 0)$ से परवलय $y^2 = 4x$ तक की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये।

Find the shortest distance from the point $(1, 0)$ to the parabola $y^2 = 4x$. 13

(c) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ x-अक्ष के चारों तरफ परिभ्रमण कर रहा है। परिक्रमित घन का आयतन ज्ञात कीजिये।

The ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ revolves about the x-axis. Find the volume of the solid of revolution. 13

(d) रेखाओं

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

और z-अक्ष के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये।

Find the shortest distance between the lines

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

and the z-axis. 12

3. (a) रैखिक समीकरण निकाय

$$x+3y-2z=-1$$
$$5y+3z=-8$$
$$x-2y-5z=7$$

के लिये निर्धारित कीजिये कि निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सही हैं और कौन-से गलत :

(i) समीकरण निकाय का कोई भी हल नहीं है।

(ii) समीकरण निकाय का सिर्फ एक ही हल है।

(iii) समीकरण निकाय के असीम मात्रा में अनेक हल हैं।

For the system of linear equations

$$x+3y-2z=-1$$
$$5y+3z=-8$$
$$x-2y-5z=7$$

determine which of the following statements are true and which are false :

(i) The system has no solution.

(ii) The system has a unique solution.

(iii) The system has infinitely many solutions. 13

(b) मान लीजिये कि

$$f(x, y) = xy^2, \quad \text{यदि} \quad y > 0$$
$$= -xy^2, \quad \text{यदि} \quad y \leq 0$$

निर्धारित कीजिये कि $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ और $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ में से किसका अस्तित्व है और किसका अस्तित्व नहीं है।

Let

$$f(x, y) = xy^2, \quad \text{if} \quad y > 0$$
$$= -xy^2, \quad \text{if} \quad y \leq 0$$

Determine which of $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ exists and which does not exist. 12

(c) परवलयज $(x+y+z)(2x+y-z) = 6z$ की उन जनक रेखाओं के समीकरणों को ज्ञात कीजिये, जो बिन्दु $(1, 1, 1)$ में से गुज़रती हैं।

Find the equations to the generating lines of the paraboloid $(x+y+z)(2x+y-z) = 6z$ which pass through the point $(1, 1, 1)$. 13

(d) xyz-समतल में स्थित, बिन्दुओं $(0, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$ और $(1, 2, 3)$ में से गुज़रते हुये गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of the sphere in xyz-plane passing through the points $(0, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$ and $(1, 2, 3)$. 12

4. (a) अन्तराल $[2, 3]$ पर $x^4 - 5x^2 + 4$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये।

Find the maximum and the minimum values of $x^4 - 5x^2 + 4$ on the interval $[2, 3]$. 13

(b) समाकल $\int_0^a \int_{x/a}^x \frac{x\,dy\,dx}{x^2 + y^2}$ का मान निकालिये।

Evaluate the integral $\int_0^a \int_{x/a}^x \frac{x\,dy\,dx}{x^2 + y^2}$. 12

(c) उस शंकु, जिसका शीर्ष $(0, 0, 1)$ है और जिसका निर्देशक वक्र $2x^2 - y^2 = 4$, $z = 0$ है, का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of the cone with $(0, 0, 1)$ as the vertex and $2x^2 - y^2 = 4$, $z = 0$ as the guiding curve. 13

(d) $3x - y + 3z = 8$ के समांतर और बिन्दु $(1, 1, 1)$ में से गुज़रते हुये समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of the plane parallel to $3x - y + 3z = 8$ and passing through the point $(1, 1, 1)$. 12

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) हल कीजिये/Solve : 10

$$y'' - y = x^2 e^{2x}$$

(b) $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 3t^3$ समीकरणों वाले वक्र के एक आम बिन्दु पर स्पर्श-रेखा और रेखा $y = z - x = 0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।

Find the angle between the tangent at a general point of the curve whose equations are $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 3t^3$ and the line $y = z - x = 0$. 10

(c) हल कीजिये/Solve : 10

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 12e^{2x} + 27e^{-x}$$

(d) (i) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिये।

Find the Laplace transform of $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

(ii) $\frac{5s^2 + 3s - 16}{(s-1)(s-2)(s+3)}$ का विलोम लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिये।

Find the inverse Laplace transform of $\frac{5s^2 + 3s - 16}{(s-1)(s-2)(s+3)}$. 10

(e) एक कण को धरती के एक बिन्दु से प्रक्षेपित करने पर वह एक दीवार, जो प्रक्षेपण बिन्दु से d दूरी पर है और जिसकी ऊँचाई h है, को छूते हुये पार करता है। अगर यह कण ऊर्ध्वाधर तल पर गतिमान है और इसकी क्षैतिज पहुँच R है, तो प्रक्षेपण की उच्चता ज्ञात कीजिये।

A particle projected from a given point on the ground just clears a wall of height h at a distance d from the point of projection. If the particle moves in a vertical plane and if the horizontal range is R, find the elevation of the projection. 10

6. (a) हल कीजिये/Solve : 13

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y + 2\frac{dy}{dx}x - y = 0$$

(b) एक कण, जो एक सरल रेखा में सरल आवर्त गति से चल रहा है, के पथ के केन्द्र से x_1 और x_2 की दूरी पर वेग क्रमशः v_1 और v_2 हैं। उसकी गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिये।

A particle moving with simple harmonic motion in a straight line has velocities v_1 and v_2 at distances x_1 and x_2 respectively from the centre of its path. Find the period of its motion. 12

(c) हल कीजिये/Solve : 13

$$y'' + 16y = 32\sec 2x$$

(d) अगर गोलक $x^2+y^2+z^2=a^2$ का पृष्ठ S है, तो गाउस के अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये

$$\iint_S [(x+z)\,dydz+(y+z)\,dzdx+(x+y)\,dxdy]$$

का मान निकालिये।

If S is the surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$, then evaluate

$$\iint_S [(x+z)\,dydz+(y+z)\,dzdx+(x+y)\,dxdy]$$

using Gauss' divergence theorem. 12

7. (a) हल कीजिये/Solve : 13

$$(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=4\cos(\log(1+x))$$

(b) वक्र

$$\vec{r}=a(u-\sin u)\vec{i}+a(1-\cos u)\vec{j}+bu\,\vec{k}$$

की वक्रता और विमोटन ज्ञात कीजिये।

Find the curvature and torsion of the curve

$$\vec{r}=a(u-\sin u)\vec{i}+a(1-\cos u)\vec{j}+bu\,\vec{k}$$ 12

(c) प्रारंभिक मान समस्या

$$y''-5y'+4y=e^{2t}$$
$$y(0)=\frac{19}{12},\ y'(0)=\frac{8}{3}$$

को हल कीजिये।

Solve the initial value problem

$$y''-5y'+4y=e^{2t}$$
$$y(0)=\frac{19}{12},\ y'(0)=\frac{8}{3}$$ 13

(d) α और β को, जिसके लिये $x^\alpha y^\beta$ समीकरण $(4y^2+3xy)dx-(3xy+2x^2)dy=0$ का एक समाकलन गुणक है, ज्ञात कीजिये और समीकरण हल कीजिये।

Find α and β such that $x^\alpha y^\beta$ is an integrating factor of $(4y^2+3xy)dx-(3xy+2x^2)dy=0$ and solve the equation. 12

8. (a) मान लीजिये कि $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ है। दर्शाइये कि $\text{curl}(\text{curl}\,\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$.

Let $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Show that $\text{curl}(\text{curl}\,\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$. 12

(b) स्टोक्स प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये रेखा समाकल $\int_C -y^3dx + x^3dy + z^3dz$ का मान निकालिये। यहाँ सिलिन्डर $x^2 + y^2 = 1$ और समतल $x + y + z = 1$ का प्रतिच्छेद C है। C पर अभिविन्यास xy-समतल में वामावर्त गति के संगत है।

Evaluate the line integral $\int_C -y^3dx + x^3dy + z^3dz$ using Stokes' theorem. Here C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $x + y + z = 1$. The orientation on C corresponds to counterclockwise motion in the xy-plane. 13

(c) मान लीजिये कि $\vec{F} = xy^2\vec{i} + (y + x)\vec{j}$ है। ग्रीन के प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y = x^2$ और $y = x$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर $(\nabla \times \vec{F})\cdot\vec{k}$ का समाकलन कीजिये।

Let $\vec{F} = xy^2\vec{i} + (y + x)\vec{j}$. Integrate $(\nabla \times \vec{F})\cdot\vec{k}$ over the region in the first quadrant bounded by the curves $y = x^2$ and $y = x$ using Green's theorem. 13

(d) $f(y)$, जिसके लिये समीकरण $(2xe^y + 3y^2)\,dy + (3x^2 + f(y))\,dx = 0$ यथातथ्य है, ज्ञात कीजिये और हल निकालिये।

Find $f(y)$ such that $(2xe^y + 3y^2)\,dy + (3x^2 + f(y))\,dx = 0$ is exact and hence solve. 12

★ ★ ★

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* माना कि $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन है, जैसा कि

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2}, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Let $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2}, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

Find the value of $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. 10

(b) माना कि $f : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ एक फलन है और $(a, b) \in D$. अगर $f(x, y)$ बिंदु (a, b) पर संतत है, तो दर्शाइए कि फलन $f(x, b)$ और $f(a, y)$ क्रमशः $x = a$ और $y = b$ पर संतत हैं।

Let $f : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ be a function and $(a, b) \in D$. If $f(x, y)$ is continuous at (a, b), then show that the functions $f(x, b)$ and $f(a, y)$ are continuous at $x = a$ and at $y = b$ respectively. 10

(c) माना कि $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ एक रैखिक प्रतिचित्र है, जैसा कि $T(2, 1) = (5, 7)$ एवं $T(1, 2) = (3, 3)$. अगर A मानक आधारों e_1, e_2 के सापेक्ष T के संगत आव्यूह है, तो A की कोटि ज्ञात कीजिए।

Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear map such that $T(2, 1) = (5, 7)$ and $T(1, 2) = (3, 3)$. If A is the matrix corresponding to T with respect to the standard bases e_1, e_2, then find Rank (A). 10

(d) अगर

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{और} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

है, तो दर्शाइए कि $AB = 6I_3$. इस परिणाम का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

If

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

then show that $AB = 6I_3$. Use this result to solve the following system of equations :

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

10

(e) दर्शाइए कि

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1} \quad \text{और} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$$

प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांकों और उस समतल, जिसमें दोनों रेखाएँ हैं, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Show that the lines

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1} \quad \text{and} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$$

intersect. Find the coordinates of the point of intersection and the equation of the plane containing them. 10

2. *(a)* क्या $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$, $x = \frac{\pi}{2}$ पर अवकलनीय है? अगर आपका उत्तर हाँ है, तो $f(x)$ का अवकलज $x = \frac{\pi}{2}$ पर ज्ञात कीजिए। अगर आपका उत्तर ना है, तो अपने उत्तर का प्रमाण दीजिए।

Is $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ differentiable at $x = \frac{\pi}{2}$? If yes, then find its derivative at $x = \frac{\pi}{2}$. If no, then give a proof of it. 15

(b) माना कि A और B समान कोटि के दो लांबिक आव्यूह हैं तथा $\det A + \det B = 0$. दर्शाइए कि $A + B$ एक अव्युत्क्रमणीय (सिंगुलर) आव्यूह है।

Let A and B be two orthogonal matrices of same order and $\det A + \det B = 0$. Show that $A + B$ is a singular matrix. 15

(c) *(i)* समतल $x + 2y + 3z = 12$ निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर प्रतिच्छेद करता है। त्रिभुज ABC के परिवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) सिद्ध कीजिए कि समतल $z = 0$ गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ के अन्वालोपी शंकु, जिसका शीर्ष $(2, 4, 1)$ पर है, को एक समकोणीय अतिपरवलय पर प्रतिच्छेद करता है।

(i) The plane $x + 2y + 3z = 12$ cuts the axes of coordinates in A, B, C. Find the equations of the circle circumscribing the triangle ABC. 10

(ii) Prove that the plane $z = 0$ cuts the enveloping cone of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ which has the vertex at $(2, 4, 1)$ in a rectangular hyperbola. 10

3. *(a)* फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ का अंतराल $[2, 3]$ पर अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum and the minimum value of the function $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ on the interval $[2, 3]$. 15

(b) सिद्ध कीजिए कि साधारणतः किसी एक बिंदु से परवलयज $x^2 + y^2 = 2az$ पर तीन अभिलंब बनाए जा सकते हैं, लेकिन अगर बिंदु सतह $27a(x^2 + y^2) + 8(a - z)^3 = 0$ पर स्थित है, तो इन तीन अभिलंबों में से दो अभिलंब एक ही हैं।

Prove that, in general, three normals can be drawn from a given point to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$, but if the point lies on the surface

$$27a(x^2 + y^2) + 8(a - z)^3 = 0$$

then two of the three normals coincide. 15

(c) माना कि

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) आव्यूह A की कोटि ज्ञात कीजिए।

(ii) उपसमष्टि

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

की विमा ज्ञात कीजिए।

Let

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Find the rank of matrix A.

(ii) Find the dimension of the subspace

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

15+5=20

4. *(a)* कैले-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए। इस प्रमेय का उपयोग करके A^{100} का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

State the Cayley-Hamilton theorem. Use this theorem to find A^{100}, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15

(b) बिंदु P से गुजरने वाली दीर्घवृत्तज

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

की अभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि अगर यह $4PG_3$ के समान है, जहाँ G_3 वह बिंदु है जहाँ P से गुजरने वाली अभिलंब जीवा xy-तल पर मिलती है, तो P शंकु

$$\frac{x^2}{a^6}(2c^2 - a^2) + \frac{y^2}{b^6}(2c^2 - b^2) + \frac{z^2}{c^4} = 0$$

पर स्थित है।

Find the length of the normal chord through a point P of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

and prove that if it is equal to $4PG_3$, where G_3 is the point where the normal chord through P meets the xy-plane, then P lies on the cone

$$\frac{x^2}{a^6}(2c^2 - a^2) + \frac{y^2}{b^6}(2c^2 - b^2) + \frac{z^2}{c^4} = 0$$

15

(c) *(i)* अगर

$$u = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}}}$$

है, तो दर्शाइए कि $\sin^2 u$, x और y का $-\frac{1}{6}$ घातविशिष्ट समांगी फलन है। अतएव दर्शाइए कि

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{12}\left(\frac{13}{12} + \frac{\tan^2 u}{12}\right)$$

(ii) जैकोबियन विधि का व्यवहार करते हुए दर्शाइए कि अगर $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ और $f(0) = 0$ है, तो

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(i) If

$$u = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{x^{1/2}+y^{1/2}}}$$

then show that $\sin^2 u$ is a homogeneous function of x and y of degree $-\frac{1}{6}$.

Hence show that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{12}\left(\frac{13}{12} + \frac{\tan^2 u}{12}\right)$$ 12

(ii) Using the Jacobian method, show that if $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ and $f(0) = 0$, then

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$ 8

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* अवकल समीकरण

$$(2y\sin x + 3y^4 \sin x\cos x)\,dx - (4y^3\cos^2 x + \cos x)\,dy = 0$$

को हल कीजिए।

Solve the differential equation

$$(2y\sin x + 3y^4 \sin x\cos x)\,dx - (4y^3\cos^2 x + \cos x)\,dy = 0$$ 10

(b) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 e^{2x}\sin 2x$$

का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए।

Determine the complete solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 e^{2x}\sin 2x$$ 10

(c) एक भारी एकसमान छड़ AB का एक सिरा एक रूक्ष क्षैतिज छड़ AC, जिसके साथ वह वलय (रिंग) के द्वारा जुड़ी हुई है, पर सरक सकती है। B एवं C एक रस्सी से जुड़े हैं। जब छड़ सर्पण बिंदु पर है, तब $AC^2 - AB^2 = BC^2$ है। यदि क्षैतिज रेखा व AB के बीच का कोण θ है, तो सिद्ध कीजिए कि घर्षण गुणांक $\dfrac{\cot\theta}{2+\cot^2\theta}$ है।

One end of a heavy uniform rod AB can slide along a rough horizontal rod AC, to which it is attached by a ring. B and C are joined by a string. When the rod is on the point of sliding, then $AC^2 - AB^2 = BC^2$. If θ is the angle between AB and the horizontal line, then prove that the coefficient of friction is $\dfrac{\cot\theta}{2+\cot^2\theta}$. 10

(d) एक कण का पृथ्वी द्वारा आकर्षण बल उस कण के पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है। एक कण, जिसका भार पृथ्वी की सतह पर W है, सतह से $3h$ ऊँचाई से पृथ्वी की सतह पर गिरता है। दर्शाइए कि पृथ्वी के आकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य का परिमाण $\dfrac{3}{4}hW$ है, जहाँ h पृथ्वी की त्रिज्या है।

The force of attraction of a particle by the earth is inversely proportional to the square of its distance from the earth's centre. A particle, whose weight on the surface of the earth is W, falls to the surface of the earth from a height $3h$ above it. Show that the magnitude of work done by the earth's attraction force is $\dfrac{3}{4}hW$, where h is the radius of the earth. 10

(e) वक्र $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ के बिंदु (1, 1, 1) पर स्पर्श-रेखा की दिशा में फलन $xy^2+yz^2+zx^2$ का दिशात्मक अवकलज ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of the function $xy^2+yz^2+zx^2$ along the tangent to the curve $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ at the point (1, 1, 1). 10

6. (a) एक पिण्ड एक शंकु और उसके नीचे अर्धगोले से बना है। शंकु के आधार तथा अर्धगोले के शिखर का अर्धव्यास a है। पूरा पिण्ड एक रूक्ष क्षैतिज मेज पर रखा है, जिसका अर्धगोला मेज को स्पर्श करता है। दर्शाइए कि शंकु की अधिकतम ऊँचाई, जिससे कि साम्यावस्था स्थिर बनी रहे, $\sqrt{3}\,a$ है।

A body consists of a cone and underlying hemisphere. The base of the cone and the top of the hemisphere have same radius a. The whole body rests on a rough horizontal table with hemisphere in contact with the table. Show that the greatest height of the cone, so that the equilibrium may be stable, is $\sqrt{3}\,a$. 15

(b) वक्र C के चारों तरफ $\vec{F}$ का परिसंचरण ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{F}=(2x+y^2)\hat{i}+(3y-4x)\hat{j}$ और C, बिंदु (0, 0) से बिंदु (1, 1) तक वक्र $y=x^2$ के द्वारा तथा बिंदु (1, 1) से बिंदु (0, 0) तक वक्र $y^2=x$ के द्वारा परिभाषित है।

Find the circulation of $\vec{F}$ round the curve C, where $\vec{F}=(2x+y^2)\hat{i}+(3y-4x)\hat{j}$ and C is the curve $y=x^2$ from (0, 0) to (1, 1) and the curve $y^2=x$ from (1, 1) to (0, 0). 15

(c) (i) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (3\sin x - \cot x)\frac{dy}{dx} + 2y\sin^2 x = e^{-\cos x}\sin^2 x$$

को हल कीजिए।

(ii) $t^{-1/2}$ तथा $t^{1/2}$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $t^{n+\frac{1}{2}}$ का लाप्लास रूपांतर

$$\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}{s^{n+1+\frac{1}{2}}}$$

होता है, जहाँ $n \in \mathbb{N}$.

(i) Solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (3\sin x - \cot x)\frac{dy}{dx} + 2y\sin^2 x = e^{-\cos x}\sin^2 x$$ 10

(ii) Find the Laplace transforms of $t^{-1/2}$ and $t^{1/2}$. Prove that the Laplace transform of $t^{n+\frac{1}{2}}$, where $n \in \mathbb{N}$, is

$$\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}{s^{n+1+\frac{1}{2}}}$$ 10

7. (a) समीकरण $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ के संगत समांगी अवकल समीकरण का रेखीय स्वतंत्र हल निकालिए और तब दिए गए समीकरण का प्राचल-विचरण विधि द्वारा सामान्य हल निकालिए।

Find the linearly independent solutions of the corresponding homogeneous differential equation of the equation $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ and then find the general solution of the given equation by the method of variation of parameters. 15

(b) कुंडलिनी $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = au\tan\alpha$ के लिए वक्रता की त्रिज्या तथा विमोटन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature and radius of torsion of the helix $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = au\tan\alpha$. 15

(c) y-अक्ष की दिशा में गतिमान एक कण का मूलबिंदु की ओर त्वरण Fy है, जहाँ F, y का एक धनात्मक एवं सम फलन है। जब कण $y = -a$ तथा $y = a$ के बीच में कंपन करता है, तब उसका आवर्तकाल T है। दर्शाइए कि

$$\frac{2\pi}{\sqrt{F_1}} < T < \frac{2\pi}{\sqrt{F_2}}$$

जहाँ F_1 एवं F_2 परास $[-a, a]$ में F के अधिकतम एवं न्यूनतम मान हैं। आगे दर्शाइए कि जब लंबाई l का एक सरल लोलक ऊर्ध्वाधर रेखा के किसी भी ओर 30° तक दोलन करता है, तब T, $2\pi\sqrt{l/g}$ तथा $2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{\pi/3}$ के बीच में रहता है।

A particle moving along the y-axis has an acceleration Fy towards the origin, where F is a positive and even function of y. The periodic time, when the particle vibrates between $y = -a$ and $y = a$, is T. Show that

$$\frac{2\pi}{\sqrt{F_1}} < T < \frac{2\pi}{\sqrt{F_2}}$$

where F_1 and F_2 are the greatest and the least values of F within the range $[-a, a]$. Further, show that when a simple pendulum of length l oscillates through 30° on either side of the vertical line, T lies between $2\pi\sqrt{l/g}$ and $2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{\pi/3}$. 20

8. (a) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^2 \cot^2\alpha - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\alpha = 1$$

का विचित्र हल प्राप्त कीजिए। दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्ण पूर्वग भी ज्ञात कीजिए। पूर्ण पूर्वग तथा विचित्र हल की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

Obtain the singular solution of the differential equation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^2 \cot^2\alpha - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\alpha = 1$$

Also find the complete primitive of the given differential equation. Give the geometrical interpretations of the complete primitive and singular solution. 15

(b) एक गतिमान ग्रह का त्वरण $\frac{\mu}{(\text{दूरी})^2}$ के बराबर है और त्वरण की दिशा हमेशा एक स्थिर बिंदु (तारा) की ओर है। सिद्ध कीजिए कि उस ग्रह का पथ एक शंकु-परिच्छेद है। वे प्रतिबंध ज्ञात कीजिए, जिनके अन्तर्गत पथ *(i)* दीर्घवृत्त, *(ii)* परवलय और *(iii)* अतिपरवलय बन जाता है।

Prove that the path of a planet, which is moving so that its acceleration is always directed to a fixed point (star) and is equal to $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$, is a conic section. Find the conditions under which the path becomes *(i)* ellipse, *(ii)* parabola and *(iii)* hyperbola. 15

(c) (i) गाउस के अपसरण प्रमेय का कथन लिखिए। इस प्रमेय को $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ के लिए $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ और $z = 3$ से घिरे हुए क्षेत्र में सत्यापित कीजिए।

(ii) स्टोक्स प्रमेय के द्वारा $\oint_C e^x dx + 2y dy - dz$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C, वक्र $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ है।

(i) State Gauss divergence theorem. Verify this theorem for $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$, taken over the region bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$. 15

(ii) Evaluate by Stokes' theorem $\oint_C e^x dx + 2y dy - dz$, where C is the curve $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$. 5

★★★

CS (Main) Exam, 2020

URC–U–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1\. (a) माना समुच्चय V में सभी $n \times n$ के वास्तविक मैजिक वर्ग हैं। दिखाइए कि समुच्चय V, R पर एक सदिश समष्टि है। दो भिन्न-भिन्न 2×2 मैजिक वर्ग के उदाहरण दीजिए।

Consider the set V of all $n \times n$ real magic squares. Show that V is a vector space over R. Give examples of two distinct 2×2 magic squares. 10

(b) माना $M_2(R)$ सभी 2×2 वास्तविक आव्यूहों का सदिश समष्टि है। माना $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$. माना $T: M_2(R) \to M_2(R)$ एक रैखिक रूपांतरण है, जो $T(A) = BA$ द्वारा परिभाषित है। T की कोटि (रैंक) व शून्यता (नलिटि) ज्ञात कीजिए। आव्यूह A ज्ञात कीजिए, जो शून्य आव्यूह को प्रतिचित्रित करता है।

Let $M_2(R)$ be the vector space of all 2×2 real matrices. Let $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$. Suppose $T: M_2(R) \to M_2(R)$ is a linear transformation defined by $T(A) = BA$. Find the rank and nullity of T. Find a matrix A which maps to the null matrix. 10

(c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ का मान निकालिए।

Evaluate $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$. 10

(d) वक्र $(2x+3)y = (x-1)^2$ के सभी अनंतस्पर्शी निकालिए।

Find all the asymptotes of the curve $(2x+3)y = (x-1)^2$. 10

(e) दीर्घवृत्तज $2x^2 + 6y^2 + 3z^2 = 27$ के स्पर्श समतल का समीकरण निकालिए, जो रेखा $x - y - z = 0 = x - y + 2z - 9$ से होकर गुजरता है।

Find the equations of the tangent plane to the ellipsoid $2x^2 + 6y^2 + 3z^2 = 27$ which passes through the line $x - y - z = 0 = x - y + 2z - 9$. 10

2\. (a) $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$ का मान निकालिए।

Evaluate $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$. 15

(b) एक $n \times n$ आव्यूह A को परिभाषित कीजिए, जबकि $A = I - 2u \cdot u^T$, जहाँ u एक इकाई स्तंभ सदिश है।

(i) परीक्षण कीजिए कि A सममित है।

(ii) परीक्षण कीजिए कि A लांबिक है।

(iii) दिखाइए कि आव्यूह A का अनुरेख $(n-2)$ है।

(iv) आव्यूह $A_{3\times3}$ निकालिए, जबकि $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ है।

Define an $n \times n$ matrix as $A = I - 2u \cdot u^T$, where u is a unit column vector.

(i) Examine if A is symmetric.

(ii) Examine if A is orthogonal.

(iii) Show that trace $(A) = n-2$.

(iv) Find $A_{3\times3}$, when $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. 20

(c) एक ऐसे बेलन का समीकरण निकालिए, जिसकी जनक-रेखाएँ, रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समांतर हैं तथा जिसका मार्गदर्शक वक्र $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$ है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$. 15

3. (a) निम्न फलन पर विचार कीजिए :

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - 5t + 4)(t^2 - 5t + 6)\, dt$$

(i) फलन $f(x)$ के क्रांतिक बिंदु निकालिए।

(ii) वे बिंदु निकालिए, जहाँ $f(x)$ का स्थानीय न्यूनतम होगा।

(iii) वे बिंदु निकालिए, जहाँ $f(x)$ का स्थानीय अधिकतम होगा।

(iv) फलन $f(x)$ के $[0,\ 5]$ में कितने शून्यक होंगे, निकालिए।

Consider the function $f(x) = \int_0^x (t^2 - 5t + 4)(t^2 - 5t + 6)\, dt$.

(i) Find the critical points of the function $f(x)$.

(ii) Find the points at which local minimum occurs.

(iii) Find the points at which local maximum occurs.

(iv) Find the number of zeros of the function $f(x)$ in $[0,\ 5]$. 20

(b) माना F सम्मिश्र संख्याओं का एक उपक्षेत्र है व $T: F^3 \to F^3$ एक ऐसा फलन है, जो निम्न रूप से परिभाषित है :

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ -3x_1 + x_2 - x_3)$$

$a,\ b,\ c$ पर क्या शर्तें हैं कि $(a,\ b,\ c)$, T के शून्य समष्टि में है? T की शून्यता निकालिए।

Let F be a subfield of complex numbers and T a function from $F^3 \to F^3$ defined by $T(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ -3x_1 + x_2 - x_3)$. What are the conditions on $a,\ b,\ c$ such that $(a,\ b,\ c)$ be in the null space of T? Find the nullity of T. 15

(c) यदि सरल रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ शंकु $5yz - 8zx - 3xy = 0$ के तीन परस्पर लांबिक जनकों के समुच्चय में से एक है, तब अन्य दो जनकों के समीकरण निकालिए।

If the straight line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ represents one of a set of three mutually perpendicular generators of the cone $5yz - 8zx - 3xy = 0$, then find the equations of the other two generators. 15

4. (a) माना

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{और} \quad B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) AB ज्ञात कीजिए।

(ii) सारणिक (A) व सारणिक (B) ज्ञात कीजिए।

(iii) निम्न रैखिक समीकरणों के निकाय का हल निकालिए :

$$x + 2z = 3, \quad 2x - y + 3z = 3, \quad 4x + y + 8z = 14$$

Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) Find AB.

(ii) Find $\det(A)$ and $\det(B)$.

(iii) Solve the following system of linear equations :

$$x + 2z = 3, \quad 2x - y + 3z = 3, \quad 4x + y + 8z = 14$$

15

(b) अतिपरवलयिक परवलयज $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ के लांबिक जनकों के प्रतिच्छेद बिंदु का बिंदुपथ निकालिए।

Find the locus of the point of intersection of the perpendicular generators of the hyperbolic paraboloid $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$. 15

(c) लाग्रांज की अनिर्धारित गुणक विधि का प्रयोग करके फलन $u=x^2+y^2+z^2$ का चरम मान ज्ञात कीजिए, जो $2x+3y+5z=30$ शर्त द्वारा प्रतिबंधित है।

Find an extreme value of the function $u=x^2+y^2+z^2$, subject to the condition $2x+3y+5z=30$, by using Lagrange's method of undetermined multiplier. 20

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx+x\,dy)=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy-y\,dx)$$

Solve the following differential equation :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx+x\,dy)=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy-y\,dx)$$ 10

(b) वृत्त-कुल, जो बिंदु (0, 2) एवं (0, −2) से गुजरता है, का लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए।

Find the orthogonal trajectories of the family of circles passing through the points (0, 2) and (0, −2). 10

(c) a, b, c के किस मान के लिए सदिश क्षेत्र

$$\overline{V}=(-4x-3y+az)\hat{i}+(bx+3y+5z)\hat{j}+(4x+cy+3z)\hat{k}$$

अघूर्णी है? तब $\overline{V}$ को अदिश फलन ϕ की प्रवणता के रूप में व्यक्त कीजिए। ϕ को ज्ञात कीजिए।

For what value of a, b, c is the vector field

$$\overline{V}=(-4x-3y+az)\hat{i}+(bx+3y+5z)\hat{j}+(4x+cy+3z)\hat{k}$$

irrotational? Hence, express $\overline{V}$ as the gradient of a scalar function ϕ. Determine ϕ. 10

(d) एक एकसमान छड़, जो ऊर्ध्वाधर दशा में है, अपने एक सिरे पर स्वतंत्र रूप से वर्तन कर सकती है तथा दूसरे सिरे पर लगाए गए एक क्षैतिज बल, जिसका मान छड़ के भार का आधा है, द्वारा ऊर्ध्वाधर से एक तरफ खींची जाती है। बताइए कि ऊर्ध्वाधर से किस कोण पर छड़ विश्राम करेगी।

A uniform rod, in vertical position, can turn freely about one of its ends and is pulled aside from the vertical by a horizontal force acting at the other end of the rod and equal to half its weight. At what inclination to the vertical will the rod rest? 10

(e) एक हल्की दृढ़ छड़ ABC से तीन कण, जिनमें से हरेक का द्रव्यमान m है, A, B तथा C पर बंधे हुए हैं। उस छड़ को बिंदु A से BC दूरी के बराबर स्थित बिंदु पर एक बल P के द्वारा लम्बवत् मारा जाता है। सिद्ध कीजिए कि पैदा हुई गतिज ऊर्जा का मान $\frac{1}{2}\frac{P^2}{m}\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$ है, जहाँ $AB = a$ तथा $BC = b$.

A light rigid rod ABC has three particles each of mass m attached to it at A, B and C. The rod is struck by a blow P at right angles to it at a point distant from A equal to BC. Prove that the kinetic energy set up is $\frac{1}{2}\frac{P^2}{m}\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$, where $AB = a$ and $BC = b$. 10

6. (a) प्राचल विचरण विधि का प्रयोग करके, निम्न अवकल समीकरण का हल निकालिए, यदि $y = e^{-x}$, पूरक फलन (CF) का एक हल है :

$$y'' + (1-\cot x)y' - y\cot x = \sin^2 x$$

Using the method of variation of parameters, solve the differential equation $y'' + (1-\cot x)y' - y\cot x = \sin^2 x$, if $y = e^{-x}$ is one solution of CF. 20

(b) दिए गए सदिश फलन $\overline{A}$, जहाँ $\overline{A} = (3x^2+6y)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\,\hat{k}$, के लिए $\int_C \overline{A}\cdot d\overline{r}$ का मान निकालिए, जहाँ C बिंदु (0, 0, 0) से (1, 1, 1) तक निम्न पथों से निर्देशित है :

(i) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(ii) सरल रेखा (0, 0, 0) से (1, 0, 0) तक जोड़ने पर, फिर (1, 1, 0) तक तथा फिर (1, 1, 1) तक

(iii) सरल रेखा (0, 0, 0) से (1, 1, 1) तक जोड़ने पर

क्या सभी स्थितियों में परिणाम समान हैं? कारण की व्याख्या कीजिए।

For the vector function $\overline{A}$, where $\overline{A} = (3x^2+6y)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\,\hat{k}$, calculate $\int_C \overline{A}\cdot d\overline{r}$ from (0, 0, 0) to (1, 1, 1) along the following paths :

(i) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(ii) Straight lines joining (0, 0, 0) to (1, 0, 0), then to (1, 1, 0) and then to (1, 1, 1)

(iii) Straight line joining (0, 0, 0) to (1, 1, 1)

Is the result same in all the cases? Explain the reason. 15

(c) एक दंड AD दो आलंब B एवं C पर विश्राम करता है, जबकि $AB = BC = CD$. यह पाया गया कि दंड झुक जाएगा यदि एक भार p kg, बिंदु A से लटकाया जाए या एक भार q kg, बिंदु D से लटकाया जाए। दंड का भार बताइए।

A beam AD rests on two supports B and C, where $AB = BC = CD$. It is found that the beam will tilt when a weight of p kg is hung from A or when a weight of q kg is hung from D. Find the weight of the beam. 15

7. *(a)* स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिए, जबकि सदिश क्षेत्र $\bar{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$ एक सतह S पर है जो कि एक बेलन $z = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$ का हिस्सा है, जहाँ S उपरिमुखी अभिविन्यस्त है।

Verify the Stokes' theorem for the vector field $\bar{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$ on the surface S which is the part of the cylinder $z = 1 - x^2$ for $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$; S is oriented upwards. 20

(b) लाप्लास रूपांतरण का प्रयोग करके प्रारंभिक मान समस्या $ty'' + 2ty' + 2y = 2$; $y(0) = 1$ तथा $y'(0)$ स्वेच्छ है, को हल कीजिए। क्या इस प्रश्न का हल अद्वितीय है?

Using Laplace transform, solve the initial value problem $ty'' + 2ty' + 2y = 2$; $y(0) = 1$ and $y'(0)$ is arbitrary. Does this problem have a unique solution? 10

(c) *(i)* चार एकसमान भारी छड़, जो समान भार W की हैं, एक वर्ग के रूप में ढाँचा बनाते हुए जुड़ी हैं। यह एक कोने से टँगा हुआ है। भार W तीनों नीचे वाले हरेक कोने से लटकाए हैं। वर्ग का आकार एक हल्की छड़, जो क्षैतिज विकर्ण के अनुदिश है, द्वारा रक्षित किया गया है। उस हल्की छड़ पर प्रणोद निकालिए।

(ii) एक कण वेग V से लंबी दूरी तय करने के लिए चलना शुरू करता है। एक तारे के केंद्र से कण के प्रारंभिक पथ की स्पर्श-रेखा पर लंबवत् दूरी p है। दिखाइए कि कण की तारे के केंद्र से न्यूनतम दूरी λ है, जहाँ $V^2\lambda = \sqrt{\mu^2 + p^2V^4} - \mu$. यहाँ μ एक अचर है।

(i) A square framework formed of uniform heavy rods of equal weight W jointed together, is hung up by one corner. A weight W is suspended from each of the three lower corners, and the shape of the square is preserved by a light rod along the horizontal diagonal. Find the thrust of the light rod. 10

(ii) A particle starts at a great distance with velocity V. Let p be the length of the perpendicular from the centre of a star on the tangent to the initial path of the particle. Show that the least distance of the particle from the centre of the star is λ, where $V^2\lambda = \sqrt{\mu^2 + p^2V^4} - \mu$. Here μ is a constant. 10

8. *(a)* *(i)* निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$(x+1)^2 y'' - 4(x+1)y' + 6y = 6(x+1)^2 + \sin\log(x+1)$$

(ii) अवकल समीकरण $9p^2(2-y)^2 = 4(3-y)$ के व्यापक व विचित्र हल निकालिए, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$.

(i) Solve the following differential equation :

$$(x+1)^2 y'' - 4(x+1)y' + 6y = 6(x+1)^2 + \sin\log(x+1)$$ 10

(ii) Find the general and singular solutions of the differential equation $9p^2(2-y)^2 = 4(3-y)$, where $p = \frac{dy}{dx}$. 10

(b) पृष्ठ समाकल $\iint_S \nabla \times \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS$ का मान निकालिए, जहाँ $\overline{F} = y\hat{i} + (x - 2xz)\hat{j} - xy\hat{k}$ तथा S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ की सतह है, जो xy-तल के ऊपर है।

Evaluate the surface integral $\iint_S \nabla \times \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS$ for $\overline{F} = y\hat{i} + (x - 2xz)\hat{j} - xy\hat{k}$ and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ above the xy-plane. 15

(c) एक चार पहियों वाला रेलवे ट्रक, जिसका कुल द्रव्यमान M है, के पहिए और धुरी के हर युग्म का द्रव्यमान व परिभ्रमण त्रिज्या क्रमशः m तथा k है। हर पहिए की त्रिज्या r है। यदि ट्रक को बल P द्वारा सीधे पथ (ट्रैक) पर धकेला जाता है, तब सिद्ध कीजिए कि उसका त्वरण $\dfrac{P}{M + \dfrac{2mk^2}{r^2}}$ है तथा ट्रक द्वारा प्रत्येक धुरी पर लगाए गए क्षैतिज बल का मान ज्ञात कीजिए। धुरी घर्षण व हवा का प्रतिरोध नगण्य है।

A four-wheeled railway truck has a total mass M, the mass and radius of gyration of each pair of wheels and axle are m and k respectively, and the radius of each wheel is r. Prove that if the truck is propelled along a level track by a force P, the acceleration is $\dfrac{P}{M + \dfrac{2mk^2}{r^2}}$, and find the horizontal force exerted on each axle by the truck. The axle friction and wind resistance are to be neglected. 15

★ ★ ★

CS (Main) Exam,2021

वियोज्य DETACHABLE

गणित (प्रश्न-पत्र I)
MATHEMATICS (Paper I)

निर्धारित समय : तीन घण्टे *Time Allowed : Three Hours*	*अधिकतम अंक : 250* *Maximum Marks : 250*

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हुए हैं ।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ है,

तो A^{-1} को ज्ञात किए बिना दर्शाइए कि $A^2 = A^{-1}$

If $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, then show that

$A^2 = A^{-1}$ (without finding A^{-1}). 10

1.(b) क्रमित आधारक $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ के सापेक्ष $V_3(R)$ पर परिभाषित रैखिक संकारक : $T(a, b, c) = (a + b, a - b, 2c)$ से संबन्धित आव्यूह ज्ञात कीजिए ।

Find the matrix associated with the linear operator on $V_3(R)$ defined by $T(a, b, c) = (a + b, a - b, 2c)$ with respect to the ordered basis $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. 10

1.(c) दिया गया है :

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(x+\alpha) & f(x+2\alpha) & f(x+3\alpha)\\ f(\alpha) & f(2\alpha) & f(3\alpha)\\ f'(\alpha) & f'(2\alpha) & f'(3\alpha)\end{vmatrix}$$

जहाँ f एक वास्तविक-मान अवकलनीय फलन है तथा α एक अचर है ।

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Delta(x)}{x}$ को ज्ञात कीजिए ।

Given :

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(x+\alpha) & f(x+2\alpha) & f(x+3\alpha)\\ f(\alpha) & f(2\alpha) & f(3\alpha)\\ f'(\alpha) & f'(2\alpha) & f'(3\alpha)\end{vmatrix}$$

where f is a real valued differentiable function and α is a constant.

Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Delta(x)}{x}$. 10

1.(d) दर्शाइए कि $e^x \cos x = 1$ के किन्हीं दो मूलों के बीच में $e^x \sin x - 1 = 0$ का कम से कम एक मूल विद्यमान है ।

Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$, there exists at least one root of $e^x \sin x - 1 = 0$. 10

1.(e) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक, रेखा :

$x = -\dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ के समानान्तर हैं

तथा जिसका निर्देशक-वक्र $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$ है ।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$. 10

2.(a) दर्शाइए कि वे समतल, जो कि शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ को लंब जनकों में काटते हैं, शंकु $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ को स्पर्श करते हैं।

Show that the planes, which cut the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ in perpendicular generators, touch the cone $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$. 20

2.(b) दिया गया है : $f(x, y) = |x^2 - y^2|$, तब $f_{xy}(0, 0)$ तथा $f_{yx}(0, 0)$ ज्ञात कीजिए। अतः दर्शाइए कि $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$।

Given that $f(x, y) = |x^2 - y^2|$. Find $f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$.
Hence show that $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$. 15

2.(c) दर्शाइए कि $S = \{(x, 2y, 3x) : x, y$ वास्तविक संख्याऐं हैं$\}$ $R^3(R)$ का एक उपसमष्टि है। S के दो आधार ज्ञात कीजिए। S की विमा भी ज्ञात कीजिए।

Show that $S = \{(x, 2y, 3x) : x, y$ are real numbers$\}$ is a subspace of $R^3(R)$. Find two bases of S. Also find the dimension of S. 15

3.(a)(i) यदि $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2$, जहाँ पर $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ हैं, तब $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ ज्ञात कीजिए।

If $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2$, where $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, then find $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$. 7

3.(a)(ii) यदि $\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_x^1 t f(t)\,dt$ है, तो $f(1)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_x^1 t f(t)\,dt$, then find the value of $f(1)$. 5

3.(a)(iii) $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx$ को बीटा-फलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx$ in terms of Beta function. 8

3.(b) अचर त्रिज्या r का एक गोला मूल-बिंदु O से गुजरता है तथा अक्षों को A, B, C बिन्दुओं पर काटता है। O से समतल ABC पर खींचे गए लंब-पाद का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

A sphere of constant radius r passes through the origin O and cuts the axes at the points A, B and C. Find, the locus of the foot of the perpendicular drawn from O to the plane ABC. 15

3.(c)(i) सिद्ध कीजिए कि एक वास्तविक सममित आव्यूह के दो भिन्न अभिलक्षणिक मानों के संगत अभिलक्षणिक सदिश, लांबिक हैं ।

Prove that the eigen vectors, corresponding to two distinct eigen values of a real symmetric matrix, are orthogonal. 8

3.(c)(ii) दो वर्ग आव्यूह A तथा B जिनकी कोटि, 2 है के लिए दर्शाइए कि अनुरेख $(AB) =$ अनुरेख (BA) । अतैव दर्शाइए कि $AB - BA \neq I_2$ जहाँ I_2 एक 2-कोटि का तत्समक आव्यूह है ।

For two square matrices A and B of order 2, show that trace $(AB) =$ trace (BA). Hence show that $AB - BA \neq I_2$, where I_2 is an identity matrix of order 2. 7

4.(a)(i) निम्नलिखित आव्यूह का पंक्ति-समानीत सोपानक रूप में समानयन कीजिए एवं अतैव इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिए ।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix to a row-reduced echelon form and hence also, find its rank :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

10

4.(a)(ii) सम्मिश्र संख्या क्षेत्र पर आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ के अभिलक्षणिक मान तथा संगत अभिलक्षणिक सदिशों को ज्ञात कीजिए ।

Find the eigen values and the corresponding eigen vectors of the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, over the complex-number field. 10

4.(b) दर्शाइए कि ऐस्ट्रॉइड : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का पूरा क्षेत्रफल $\frac{3}{8}\pi a^2$ है ।

Show that the entire area of the Astroid : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is $\frac{3}{8}\pi a^2$. 15

4.(c) रेखाओं

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7},$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$$

को अंतर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए । दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु को भी ज्ञात कीजिए ।

Find equation of the plane containing the lines

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7},$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}.$$

Also find the point of intersection of the given lines. 15

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) अवकल समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = x^2e^{3x} + e^x\cos 2x$$

को हल कीजिए ।

Solve the differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = x^2e^{3x} + e^x\cos 2x$$ 10

5.(b) लाप्लास रूपान्तर विधि का उपयोग करते हुए प्रारम्भिक मान समस्या :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-2x}\sin 2x;\ y(0) = y'(0) = 0$$

को हल कीजिए ।

Solve the initial value problem :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-2x}\sin 2x;\ y(0) = y'(0) = 0$$

using Laplace transform method. 10

5.(c) दो छड़े LM व MN बिन्दु M पर दृढ़ता से इस प्रकार जुड़ी हैं कि $(LM)^2 + (MN)^2 = (LN)^2$ तथा वे स्वतन्त्र रूप से साम्यावस्था में स्थिर बिन्दु L पर टँगी हैं । माना कि दोनों एकसमान छड़ों का प्रति एकांक लम्बाई, भार ω है । छड़ LM का ऊर्ध्वाधर दिशा के साथ बने कोण को छड़ों की लम्बाई के रूप में ज्ञात कीजिए ।

Two rods LM and MN are joined rigidly at the point M such that $(LM)^2 + (MN)^2 = (LN)^2$ and they are hanged freely in equilibrium from a fixed point L. Let ω be the weight per unit length of both the rods which are uniform. Determine the angle, which the rod LM makes with the vertical direction, in terms of lengths of the rods. 10

5.(d) यदि एक ग्रह, जो सूर्य के परितः वृत्तीय कक्षा में परिभ्रमण करता है, अचानक अपनी कक्षा में रोक दिया जाता है, तो वह समय, जिसमें वह सूर्य में गिर जाएगा, ज्ञात कीजिए । इसके गिरने के समय का ग्रह के परिभ्रमण आवर्तकाल से अनुपात भी ज्ञात कीजिए ।

If a planet, which revolves around the Sun in a circular orbit, is suddenly stopped in its orbit, then find the time in which it would fall into the Sun. Also, find the ratio of its falling time to the period of revolution of the planet. 10

5.(e) दर्शाइए कि $\nabla^2\left[\nabla\cdot\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)\right]=\dfrac{2}{r^4}$, जहाँ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ है।

Show that $\nabla^2\left[\nabla\cdot\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)\right]=\dfrac{2}{r^4}$, where $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. 10

6.(a) एक भारी डोरी, जिसका घनत्व एक समान नहीं है, दो बिन्दुओं से टँगी हुई है। माना कि T_1, T_2, T_3 क्रमशः कैटिनरी के बीच के बिन्दुओं A, B, C पर तनाव हैं, जिन पर इसके क्षैतिज के साथ आनति कोण, सार्व अंतर β के साथ समांतर श्रेढ़ी में हैं। माना कि डोरी के AB तथा BC भागों के भार क्रमशः ω_1 तथा ω_2 हैं। सिद्ध कीजिए

(i) T_1, T_2 तथा T_3 का हरात्मक माध्य $=\dfrac{3T_2}{1+2\cos\beta}$

(ii) $\dfrac{T_1}{T_3}=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$

A heavy string, which is not of uniform density, is hung up from two points. Let T_1, T_2, T_3 be the tensions at the intermediate points A, B, C of the catenary respectively where its inclinations to the horizontal are in arithmetic progression with common difference β. Let ω_1 and ω_2 be the weights of the parts AB and BC of the string respectively. Prove that

(i) Harmonic mean of T_1, T_2 and $T_3=\dfrac{3T_2}{1+2\cos\beta}$

(ii) $\dfrac{T_1}{T_3}=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ 20

6.(b) सभी अन्तर्ग्रस्त (शामिल) चरणों को दर्शाते हुए समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\tan x-3\cos x)\frac{dy}{dx}+2y\cos^2 x=\cos^4 x$$

को पूर्ण रूप से हल कीजिए।

Solve the equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\tan x-3\cos x)\frac{dy}{dx}+2y\cos^2 x=\cos^4 x$$

completely by demonstrating all the steps involved. 15

6.(c) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ का मान निकालिए,

जहाँ C, xy-समतल में एक स्वैच्छिक संवृत वक्र है तथा $\vec{F} = \dfrac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$ है।

Evaluate $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, where C is an arbitrary closed curve in the xy-plane and

$\vec{F} = \dfrac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$. 15

7.(a) प्रथम अष्टांशक में $y^2 + z^2 = 9$ तथा $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर $\vec{F} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ के लिए गाउस अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Gauss divergence theorem for $\vec{F} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ taken over the region in the first octant bounded by $y^2 + z^2 = 9$ and $x = 2$. 20

7.(b) अवकल समीकरण :

$$y^2 \log y = xy\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

के सभी सम्भव हल ज्ञात कीजिए।

Find all possible solutions of the differential equation :

$$y^2 \log y = xy\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$ 15

7.(c) एक भारी कण a लम्बाई की अवितान्य डोरी से एक स्थिर बिन्दु से टँगा है तथा $\sqrt{2gh}$ वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित किया जाता है। यदि $\frac{5a}{2} > h > a$ है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेपण बिन्दु से $\frac{1}{3}(a + 2h)$ ऊँचाई पहुँचने पर कण की वृत्तीय गति समाप्त हो जाती है। यह भी सिद्ध कीजिए कि उस कण द्वारा प्रक्षेपण बिंदु से ऊपर प्राप्य अधिकतम ऊँचाई $\dfrac{(4a - h)(a + 2h)^2}{27a^2}$ है।

A heavy particle hangs by an inextensible string of length a from a fixed point and is then projected horizontally with a velocity $\sqrt{2gh}$. If $\frac{5a}{2} > h > a$, then prove that the circular motion ceases when the particle has reached the height $\frac{1}{3}(a + 2h)$ from the point of projection. Also, prove that the greatest height ever reached by the particle above the point of projection is $\dfrac{(4a - h)(a + 2h)^2}{27a^2}$. 15

8.(a)(i) संनाभि शांकव कुल

$\dfrac{x^2}{a^2 + \lambda} + \dfrac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$; $a > b > 0$ अचर हैं तथा λ एक प्राचल है,

के लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए। दर्शाइए कि दिया गया वक्र-कुल स्वलांबिक है।

Find the orthogonal trajectories of the family of confocal conics

$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$; $a>b>0$ are constants and λ is a parameter.

Show that the given family of curves is self orthogonal. 10

8.(a)(ii) अवकल समीकरण : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

अतः अवकल समीकरण : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=x^3$ को प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए ।

Find the general solution of the differential equation :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=0.$$

Hence, solve the differential equation : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=x^3$ by the method of variation of parameters. 10

8.(b) द्रव्यमान m का एक कण, जो की प्रक्षेपण बिन्दु से वेग u के साथ क्षैतिज दिशा के साथ θ कोण बनाने वाली दिशा में प्रक्षेपण बिन्दु से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर समतल में प्रक्षेपित किया जाता है, उसकी गति तथा पथ का वर्णन कीजिए । यदि कणों को उसी बिन्दु से उसी ऊर्ध्वाधर समतल में वेग $4\sqrt{g}$ के साथ प्रक्षेपित किया जाता है, तो उनके पथों के शीर्षों के बिन्दुपथ को भी निर्धारित कीजिए ।

Describe the motion and path of a particle of mass m which is projected in a vertical plane through a point of projection with velocity u in a direction making an angle θ with the horizontal direction. Further, if particles are projected from that point in the same vertical plane with velocity $4\sqrt{g}$, then determine the locus of vertices of their paths. 15

8.(c) स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करते हुए $\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dS$ का मान निकालिए, जहाँ पर $\vec{F}=(x^2+y-4)\hat{i}+3xy\hat{j}+(2xy+z^2)\hat{k}$ तथा S, परवलयज $z=4-(x^2+y^2)$ का xy-समतल से ऊपर का पृष्ठ है । यहाँ $\hat{n}$, S पर एकक बहिर्मुखी अभिलंब सदिश है ।

Using Stokes' theorem, evaluate $\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dS$,

where $\vec{F}=(x^2+y-4)\hat{i}+3xy\hat{j}+(2xy+z^2)\hat{k}$ and S is the surface of the paraboloid $z=4-(x^2+y^2)$ above the xy-plane. Here, $\hat{n}$ is the unit outward normal vector on S. 15

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : **तीन घंटे**	अधिकतम अंक : **250**
Time Allowed : **Three Hours**	Maximum Marks : **250**

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें आठ प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हुए हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer (QCA) Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) सिद्ध कीजिए कि n विमीय सदिश समष्टि V के लिए n रैखिकत: स्वतंत्र सदिशों का कोई भी समुच्चय V के लिए एक आधार बनाता है ।

Prove that any set of n linearly independent vectors in a vector space V of dimension n constitutes a basis for V. *10*

(b) माना $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक रूपांतरण, ऐसा है कि $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ तथा $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\8\end{pmatrix}$ है । $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ को ज्ञात कीजिए ।

Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ and $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\8\end{pmatrix}$. Find $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. *10*

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ का मान निकालिए ।

Evaluate $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$. *10*

(d) $\int_0^2 \frac{dx}{(2x - x^2)}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए ।

Examine the convergence of $\int_0^2 \frac{dx}{(2x - x^2)}$. *10*

(e) एक चर समतल एक स्थिर बिन्दु (a, b, c) से गुज़रता है तथा अक्षों को क्रमशः A, B व C बिन्दुओं पर मिलता है । बिन्दुओं O, A, B तथा C से गुज़रते हुए गोले के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जहाँ O मूल-बिन्दु है ।

A variable plane passes through a fixed point (a, b, c) and meets the axes at points A, B and C respectively. Find the locus of the centre of the sphere passing through the points O, A, B and C, O being the origin. *10*

Q2. (a) निम्नलिखित समीकरण निकाय के सभी हलों को पंक्ति-समानीत विधि से ज्ञात कीजिए :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$$
$$-x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1$$

Find all solutions to the following system of equations by row-reduced method : *15*

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$$
$$-x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1$$

(b) एक l लम्बाई के तार को दो भागों में काटकर क्रमशः एक वर्ग तथा एक वृत्त के रूप में मोड़ा गया है । लग्रांज की अनिर्धारित गुणक विधि का प्रयोग करके, इस तरह से प्राप्त किए गए क्षेत्रफलों के योगफल का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

A wire of length l is cut into two parts which are bent in the form of a square and a circle respectively. Using Lagrange's method of undetermined multipliers, find the least value of the sum of the areas so formed. *15*

(c) यदि P, Q, R; P′, Q′, R′, एक बिन्दु से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर छः (सिक्स) अभिलम्ब पाद हैं तथा $lx + my + nz = p$ से समतल PQR निरूपित है, दर्शाइए कि $\frac{x}{a^2 l} + \frac{y}{b^2 m} + \frac{z}{c^2 n} + \frac{1}{p} = 0$, समतल P′Q′R′ को निरूपित करता है ।

If P, Q, R; P′, Q′, R′ are feet of the six normals drawn from a point to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, and the plane PQR is represented by $lx + my + nz = p$, show that the plane P′Q′R′ is given by $\frac{x}{a^2 l} + \frac{y}{b^2 m} + \frac{z}{c^2 n} + \frac{1}{p} = 0$. *20*

Q3. (a) माना समुच्चय $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x - y - z = 0 \text{ तथा} \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right\}$

सदिश समष्टि $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ के सदिशों का एक समूह है । तब

(i) सिद्ध कीजिए कि P, $\mathbb{R}^3$ की एक उपसमष्टि है ।

(ii) P का एक आधार तथा विमा ज्ञात कीजिए ।

Let the set $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x - y - z = 0 \text{ and} \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right\}$

be the collection of vectors of a vector space $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Then

(i) prove that P is a subspace of $\mathbb{R}^3$.

(ii) find a basis and dimension of P. *10+10*

(b) द्विश: समाकलन का उपयोग करके, वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ तथा परवलय $y^2 = 3x$ के उभयनिष्ठ क्षेत्रफल का परिकलन कीजिए ।

Use double integration to calculate the area common to the circle $x^2 + y^2 = 4$ and the parabola $y^2 = 3x$. *15*

(c) लघुतम संभाव्य त्रिज्या के गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखाओं :

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ को स्पर्श करता है ।

Find the equation of the sphere of smallest possible radius which touches the straight lines : $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$. *15*

Q4. (a) एक रैखिक प्रतिचित्र $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ज्ञात कीजिए जो कि $\mathbb{R}^2$ के प्रत्येक सदिश को θ कोण से घुमा देता है । यह भी सिद्ध कीजिए कि $\theta = \frac{\pi}{2}$ के लिए, T का कोई भी अभिलक्षणिक मान (आइगेनमान) $\mathbb{R}$ में नहीं है ।

Find a linear map $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ which rotates each vector of $\mathbb{R}^2$ by an angle θ. Also, prove that for $\theta = \frac{\pi}{2}$, T has no eigenvalue in $\mathbb{R}$. *15*

(b) वक्र $y^2x^2 = x^2 - a^2$ का अनुरेख (ट्रेस) कीजिए, जहाँ a एक वास्तविक अचर है ।

Trace the curve $y^2x^2 = x^2 - a^2$, where a is a real constant. 20

(c) यदि समतल $ux + vy + wz = 0$, शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ को लंब जनकों में काटता है, तो सिद्ध कीजिए कि $(b + c)\, u^2 + (c + a)\, v^2 + (a + b)\, w^2 = 0$.

If the plane $ux + vy + wz = 0$ cuts the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ in perpendicular generators, then prove that
$(b + c)\, u^2 + (c + a)\, v^2 + (a + b)\, w^2 = 0$. 15

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) दर्शाइए कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का व्यापक हल

$$y = \frac{Q}{P} - e^{-\int P\,dx}\left\{C + \int e^{\int P\,dx}\, d\left(\frac{Q}{P}\right)\right\}$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ P, Q, x के शून्येतर फलन हैं तथा C एक स्वेच्छ अचर है ।

Show that the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ can be written in the form $y = \frac{Q}{P} - e^{-\int P\,dx}\left\{C + \int e^{\int P\,dx}\, d\left(\frac{Q}{P}\right)\right\}$, where P, Q are non-zero functions of x and C, an arbitrary constant. *10*

(b) दर्शाइए कि परवलयों के निकाय : $x^2 = 4a\,(y + a)$ के लंबकोणीय संछेदी, उसी निकाय में स्थित होते हैं ।

Show that the orthogonal trajectories of the system of parabolas : $x^2 = 4a\,(y + a)$ belong to the same system. *10*

(c) w भार का एक पिंड, θ कोण से झुके हुए एक रूक्ष समतल पर स्थित है, घर्षण गुणांक μ, $\tan\theta$ से अधिक है । पिंड को समतल पर ऊपर की तरफ 'b' दूरी तक धीरे-धीरे खींचने तथा वापस आरम्भिक बिन्दु तक खींचने में किए गए कार्य को ज्ञात कीजिए, जहाँ लगाया गया बल प्रत्येक दशा में समतल के समान्तर है ।

A body of weight w rests on a rough inclined plane of inclination θ, the coefficient of friction, μ, being greater than $\tan\theta$. Find the work done in slowly dragging the body a distance 'b' up the plane and then dragging it back to the starting point, the applied force being in each case parallel to the plane. *10*

(d) एक प्रक्षेप्य $\sqrt{2gh}$ वेग के साथ बिन्दु O से प्रक्षेपित किया गया तथा समतल के बिन्दु P(x, y) पर स्पर्श-रेखा से टकराता है जहाँ अक्ष OX तथा OY क्रमशः बिन्दु O से क्षैतिज तथा अधोमुखी ऊर्ध्वाधर रेखाएँ हैं । यदि प्रक्षेपण की दो संभव दिशाएँ समकोण पर हों, तो दर्शाइए कि $x^2 = 2hy$ तथा प्रक्षेपण की संभव दिशाओं में से एक, कोण POX को द्विभाजित करती है ।

A projectile is fired from a point O with velocity $\sqrt{2gh}$ and hits a tangent at the point P(x, y) in the plane, the axes OX and OY being horizontal and vertically downward lines through the point O, respectively. Show that if the two possible directions of projection be at right angles, then $x^2 = 2hy$ and then one of the possible directions of projection bisects the angle POX. *10*

(e) दर्शाइए कि $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ अघूर्णी है । ϕ को भी ज्ञात कीजिए जबकि $\vec{A} = \nabla\phi$.

Show that $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ is irrotational. Also find ϕ such that $\vec{A} = \nabla\phi$. *10*

Q6. (a) $2l$ लम्बाई का एक तार (केबिल) जिसका भार w प्रति इकाई (यूनिट) लम्बाई है, एक क्षैतिज रेखा के दो बिन्दुओं P तथा Q से लटकी हुई है । दर्शाइए कि तार की विस्तृति (स्पैन) $2l\left(1 - \frac{2h^2}{3l^2}\right)$ है, जहाँ h तार के कसकर खींची हुई स्थिति में मध्य का झोल है ।

A cable of weight w per unit length and length $2l$ hangs from two points P and Q in the same horizontal line. Show that the span of the cable is $2l\left(1 - \frac{2h^2}{3l^2}\right)$, where h is the sag in the middle of the tightly stretched position. *20*

(b) प्राचल-विचरण विधि का उपयोग करके, निम्नलिखित अवकल समीकरण :

$$(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = (x^2 - 1)^2$$

को हल कीजिए, जहाँ समानीत समीकरण का एक हल $y = x$ दिया गया है ।

Solve the following differential equation by using the method of variation of parameters : $(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = (x^2 - 1)^2$, given that $y = x$ is one solution of the reduced equation. *15*

(c) समतल में ग्रीन के प्रमेय को $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$ के लिए सत्यापित कीजिए, जहाँ C, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र का सीमा वक्र है ।

Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$, where C is the boundary curve of the region defined by $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. *15*

Q7. (a) स्टोक्स प्रमेय को $\vec{F} = x\hat{i} + z^2\hat{j} + y^2\hat{k}$ के लिए प्रथम अष्टांशक में स्थित समतल पृष्ठ : $x + y + z = 1$ पर सत्यापित कीजिए ।

Verify Stokes' theorem for $\vec{F} = x\hat{i} + z^2\hat{j} + y^2\hat{k}$ over the plane surface : $x + y + z = 1$ lying in the first octant. *20*

(b) लाप्लास रूपांतरण का उपयोग करके निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = h(t), \text{ जहाँ } h(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

को हल कीजिए ।

Solve the following initial value problem by using Laplace's transformation $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = h(t)$, where

$$h(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$ *15*

(c) माना किसी भी अनुप्रस्थ-काट का एक बेलन दूसरे स्थिर बेलन पर संतुलित है, जहाँ वक्रीय पृष्ठों का संस्पर्श रूक्ष है तथा उभयनिष्ठ स्पर्श-रेखा क्षैतिज है । माना दोनों बेलनों के स्पर्श बिन्दु पर उनकी वक्रता त्रिज्याएँ ρ तथा ρ' हैं और संस्पर्श बिन्दु से ऊपरी बेलन के गुरुत्व केन्द्र की ऊँचाई h है । दर्शाइए कि स्थायी साम्य में ऊपरी बेलन संतुलित है यदि $h < \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'}$ ।

Suppose a cylinder of any cross-section is balanced on another fixed cylinder, the contact of curved surfaces being rough and the common tangent line horizontal. Let ρ and ρ' be the radii of curvature of the two cylinders at the point of contact and h be the height of centre of gravity of the upper cylinder above the point of contact. Show that the upper cylinder is balanced in stable equilibrium if $h < \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'}$. *15*

Q8. (a) (i) अवकल समीकरण : $(x^2 - a^2)\, p^2 - 2xyp + y^2 + a^2 = 0$, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$, के व्यापक व विचित्र हलों को ज्ञात कीजिए । व्यापक व विचित्र हलों के बीच ज्यामितीय संबंध को भी दीजिए ।

Find the general and singular solutions of the differential equation : $(x^2 - a^2)\, p^2 - 2xyp + y^2 + a^2 = 0$, where $p = \frac{dy}{dx}$. Also give the geometric relation between the general and singular solutions. *10*

(ii) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(3x + 2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5\,(3x + 2)\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x + 1$$

Solve the following differential equation : *10*

$$(3x + 2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5\,(3x + 2)\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x + 1$$

(b) n बराबर एकसमान छड़ों की एक शृंखला एक-दूसरे के साथ चिकने रूप से जुड़ी हुई है तथा इसके एक सिरे A_1 से लटकी हुई है । एक क्षैतिज बल $\vec{P}$ शृंखला के दूसरे सिरे A_{n+1} पर लगाया गया है । साम्य विन्यास में अधोमुखी ऊर्ध्वाधर रेखा से छड़ों के झुकाव ज्ञात कीजिए ।

A chain of n equal uniform rods is smoothly jointed together and suspended from its one end A_1. A horizontal force $\vec{P}$ is applied to the other end A_{n+1} of the chain. Find the inclinations of the rods to the downward vertical line in the equilibrium configuration. *15*

(c) गाउस के अपसरण प्रमेय का उपयोग करके $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ का मान निकालिए, जहाँ $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ तथा S, पृष्ठों $z = 0, \ z = 1, \ x^2 + y^2 = 4$ द्वारा बना हुआ बेलन है ।

Using Gauss' divergence theorem, evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, where $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ and S is the cylinder formed by the surfaces $z = 0, \ z = 1, \ x^2 + y^2 = 4$. *15*

वियोज्य DETACHABLE

गणित (प्रश्न-पत्र I)
MATHEMATICS (Paper I)

निर्धारित समय : तीन घण्टे
Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हुए हैं ।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए $V_1 = (2, -1, 3, 2)$, $V_2 = (-1, 1, 1, -3)$, $V_3 = (1, 1, 9, -5)$ समष्टि $\mathbb{R}^4$ के तीन सदिश हैं। क्या $(3, -1, 0, -1) \in$ विस्तृति $\{V_1, V_2, V_3\}$? अपने उत्तर को तर्कसहित सिद्ध कीजिए।

Let $V_1 = (2, -1, 3, 2)$, $V_2 = (-1, 1, 1, -3)$ and $V_3 = (1, 1, 9, -5)$ be three vectors of the space $\mathbb{R}^4$. Does $(3, -1, 0, -1) \in$ span $\{V_1, V_2, V_3\}$? Justify your answer. 10

1.(b) $T(x, y, z) = (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$ द्वारा दिए गए रैखिक रूपांतरण : $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ की कोटि तथा शून्यता ज्ञात कीजिए।

Find the rank and nullity of the linear transformation :
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ given by $T(x, y, z) = (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$ 10

1.(c) p तथा q के वो मान निकालिए जिसके लिए $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + p\cos x) - q\sin x}{x^3}$ का अस्तित्व है एवं 1 के बराबर है।

Find the values of p and q for which $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + p\cos x) - q\sin x}{x^3}$ exists and equals 1. 10

1.(d) समाकल $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Examine the convergence of the integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx$ 10

1.(e) एक चर समतल, जो कि मूल-बिन्दु O से अचर दूरी $3p$ पर है, अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A, B, C पर काटता है। दर्शाइए कि चतुष्फलक $OABC$ के केन्द्रक का बिन्दुपथ

$$9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{16}{p^2}$$ है।

A variable plane which is at a constant distance $3p$ from the origin O cuts the axes in the points A, B, C respectively. Show that the locus of the centroid of the tetrahedron $OABC$ is

$$9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{16}{p^2}.$$ 10

2.(a) यदि आधार $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ का आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ है,

तब आधार $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए ।

If the matrix of a linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relative to the basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

then find the matrix of T relative to the basis $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. 15

2.(b) दो परवलयजों $Z = 5(x^2 + y^2)$ और $Z = 6 - 7x^2 - y^2$
के बीच घिरे ठोस के आयतन को दर्शाने वाले त्रिशः समाकल का मान निकालिए ।

Evaluate the triple integral which gives the volume of the solid enclosed between the two paraboloids $Z = 5(x^2 + y^2)$ and $Z = 6 - 7x^2 - y^2$. 15

2.(c)(i) दर्शाइए कि समीकरण $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 12z + 11 = 0$
एक दीर्घवृत्तीय परवलयज प्रदर्शित करता है । साथ ही मुख्य अक्ष और मुख्य समतलों को भी ज्ञात कीजिए ।

Show that the equation $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 12z + 11 = 0$ represents an elliptic paraboloid. Also find its principal axis and principal planes. 10

2.(c)(ii) समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, निर्देशांक अक्षों को क्रमशः A, B, C में मिलता है । सिद्ध कीजिये कि मूल बिन्दु O से वृत्त ABC को मिलाने वाली रेखाओं द्वारा जनित शंकु का समीकरण

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 0$$ है ।

The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the coordinate axes in A, B, C respectively. Prove that the equation of the cone generated by the lines drawn from the origin O to meet the circle ABC is

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 0.$$ 10

3.(a) दिया गया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i) आव्यूह A के लिये कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए ।

(ii) दर्शाइए कि $n \geqslant 3$ के लिये $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$; जहाँ I कोटि 3 का तत्समक आव्यूह है । अतएव A^{40} ज्ञात कीजिए ।

Let $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(i) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix A.

(ii) Show that $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ for $n \geqslant 3$, where I is the identity matrix of order 3. Hence, find A^{40}. 10+10

3.(b) तर्क सहित दर्शाइये कि (0, 0), फलन $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ का चरम-बिन्दु है अथवा नहीं।

Justify whether (0, 0) is an extreme point for the function $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$. 15

3.(c) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0;\ 3x + y + 3z - 4 = 0$ से होकर गुजरने वाले गोले का समीकरण निम्न दो स्थितियों में ज्ञात कीजिए।

(i) बिन्दु (1, 0, –3) गोले पर हो।

(ii) दिया गया वृत्त गोले का एक वृहत् वृत्त हो।

Find the equation of the sphere through the circle
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0;\ 3x + y + 3z - 4 = 0$
in the following two cases.

(i) the point (1, 0, –3) lies on the sphere.

(ii) the given circle is a great circle of the sphere. 15

4.(a) आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\-1 & 3 & 0 & -4\\2 & 1 & 3 & -2\\1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

का पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानयन करके उसकी कोटि ज्ञात कीजिए।

Find the rank of the matrix

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\-1 & 3 & 0 & -4\\2 & 1 & 3 & -2\\1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

by reducing it to row-reduced echelon form. 15

4.(b) वक्र $y^2(x^2 - 1) = 2x - 1$ को अनुरेखित कीजिए।

Trace the curve $y^2(x^2 - 1) = 2x - 1$. 20

4.(c) सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $y = mx,\ z = c;\ y = -mx,\ z = -c$ और वृत्त $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$ से मिलने वाली रेखा का बिन्दु-पथ $c^2m^2(cy - mzx)^2 + c^2(yz - cmx)^2 = a^2m^2(z^2 - c^2)^2$ है ।

Prove that the locus of a line which meets the lines $y = mx,\ z = c;\ y = -mx,\ z = -c$ and the circle $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$ is $c^2m^2(cy - mzx)^2 + c^2(yz - cmx)^2 = a^2m^2(z^2 - c^2)^2$. 15

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) प्रारम्भिक-मान समस्या : $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 2,\quad y(0) = 1$ का हल $y = e^{x^2}\left[1 + \sqrt{\pi}\ erf(x)\right]$ के रूप में प्राप्त कीजिए ।

Obtain the solution of the initial-value problem $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 2,\quad y(0) = 1$ in the form $y = e^{x^2}\left[1 + \sqrt{\pi}\ erf(x)\right]$. 10

5.(b) दिया गया है $L\{f(t);\, p\} = F(p)$.

दर्शाइए कि $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(x)dx$. अतः समाकल $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}dt$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Given that $L\{f(t);\, p\} = F(p)$.

Show that $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(x)dx$. Hence evaluate the integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}dt$. 10

5.(c) अर्द्धव्यास 'a' का एक बेलन (सिलिंडर) एक जनक रेखा के अनुदिश एक ऊर्ध्वाधर दीवार को स्पर्श किया हुआ है । बेलन का अक्ष क्षैतिजतः स्थिर है । लम्बाई 'l' तथा भार 'W' का एक एक समान समतल दंड ऊर्ध्वाधर से 45° का कोण बनाते हुए अपने सिरों को दीवार के सहारे तथा बेलन पर टिकाए हैं । अगर घर्षण बल नगण्य हैं, तब दर्शाइए कि

$$\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{2}}$$

दीवार और बेलन की प्रतिक्रियायें भी ज्ञात कीजिए ।

A cylinder of radius 'a' touches a vertical wall along a generating line. Axis of the cylinder is fixed horizontally. A uniform flat beam of length 'l' and weight 'W' rests with its extremities in contact with the wall and the cylinder, making an angle of 45° with the vertical. If frictional forces are neglected, then show that

$$\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{2}}.$$

Also, find the reactions of the cylinder and wall. 10

5.(d) कोई कण केन्द्र 'O' के सापेक्ष आवर्त काल T के साथ सरल आवर्त गति में गतिशील है। कण बिन्दु P से OP के अनुदिश दिशा में v वेग से गुजरता है तथा $OP = p$ है। कण का बिन्दु P पर पुनः लौटने में लगा समय ज्ञात कीजिए। यदि लगा समय $\frac{T}{2}$ हो, तो p का मान क्या होगा ?

A particle is moving under Simple Harmonic Motion of period T about a centre O. It passes through the point P with velocity v along the direction OP and $OP = p$. Find the time that elapses before the particle returns to the point P. What will be the value of p when the elapsed time is $\frac{T}{2}$? 10

5.(e) यदि $\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$

$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

तो सदिश फलन $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ के θ के सापेक्ष अवकलज के मान, $\theta = \frac{\pi}{2}$ और $\theta = \pi$ पर ज्ञात कीजिए।

If $\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$

$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

then find the values of the derivative of the vector function $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ w.r.t. θ at $\theta = \frac{\pi}{2}$ and $\theta = \pi$. 10

6.(a) अवकल समीकरण :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x$$

का हल कीजिए।

Solve the differential equation :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x.$$ 15

6.(b) एक कण को समुद्र तल पर बिन्दु O_1 से वेग v तथा क्षैतिज से प्रक्षेप कोण θ पर ऊर्ध्वाधर तल में प्रक्षेपित किया जाता है तो क्षैतिज परास R_1 है। यदि इसको पुनः बिन्दु O_2, जो उसी ऊर्ध्वाधर तल में O_1 के ऊर्ध्वाधरतः h ऊँचाई पर है, से उसी वेग v तथा क्षैतिज से समान कोण θ पर प्रक्षेपित किया जाता है तो क्षैतिज परास R_2 है।

सिद्ध कीजिए $R_2 > R_1$ तथा $(R_2 - R_1) : R_1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2\theta}\right)} - 1\right\} : 1$

When a particle is projected from a point O_1 on the sea level with a velocity v and angle of projection θ with the horizon in a vertical plane, its horizontal range is R_1. If it is further projected from a point O_2, which is vertically above O_1 at a height h in the same vertical plane, with the same velocity v and same angle θ with the horizon, its horizontal range is R_2. Prove that $R_2 > R_1$ and $(R_2 - R_1) : R_1$ is equal to

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{2gh}{v^2 \sin^2\theta}\right)}-1\right\} : 1$$ 15

6.(c) समाकल $\iint\limits_S \left(3y^2z^2\,\hat{i}+4z^2x^2\,\hat{j}+z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$

का मान ज्ञात कीजिए; जहाँ S समतल $z=0$ के ऊपर पृष्ठ $4x^2+4y^2+4z^2=1$ का ऊपरी भाग है और xy-समतल द्वारा परिबद्ध है। अतैव गॉस-अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Evaluate the integral $\iint\limits_S \left(3y^2z^2\,\hat{i}+4z^2x^2\,\hat{j}+z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$,

where S is the upper part of the surface $4x^2+4y^2+4z^2=1$ above the plane $z=0$ and bounded by the xy-plane. Hence, verify Gauss-Divergence theorem. 20

7.(a)(i) अवकल समीकरण : $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$ का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the differential equation : $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$ 10

7.(a)(ii) समीकरण $x^2p^2+y(2x+y)p+y^2=0$ का प्रतिस्थापन $y=u$ और $xy=v$ द्वारा क्लेरो रूप में समानयन कीजिए। अतः समीकरण का हल निकालिए और दर्शाइए कि $y+4x=0$ अवकल समीकरण का एक विचित्र हल है।

Reduce the equation $x^2p^2+y(2x+y)p+y^2=0$ to Clairaut's form by the substitution $y=u$ and $xy=v$. Hence solve the equation and show that $y+4x=0$ is a singular solution of the differential equation. 10

7.(b) एक ठोस अर्द्ध-गोलक एक डोरी द्वारा, जिसका एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर एक बिन्दु से और दूसरा सिरा अर्द्धगोलक के किनारे (रिम) पर स्थित एक बिन्दु से बंधा है, ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिका है। ठोस अर्द्धगोलक का वक्रित पृष्ठ दीवार को स्पर्श करता है। अगर ऊर्ध्वाधर के साथ डोरी का आनति कोण θ है और अर्द्धगोलक के समतल आधार (बेस) का आनति कोण ϕ है तो $(\tan\phi-\tan\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

A solid hemisphere is supported by a string fixed to a point on its rim and to a point on a smooth vertical wall with which the curved surface is in contact. If θ is the angle of inclination of the string with vertical and ϕ is the angle of inclination of the plane base of the hemisphere to the vertical, then find the value of $(\tan\phi-\tan\theta)$. 15

7.(c) अगर एक वक्र की स्पर्श रेखा एक नियत रेखा के साथ एक स्थिर कोण θ बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि वक्रता की त्रिज्या के साथ व्यावर्तन त्रिज्या का अनुपात $\tan\theta$ के समानुपाती है। और आगे सिद्ध कीजिए कि अगर यह अनुपात एक स्थिरांक है, तो स्पर्श रेखा एक नियत दिशा के साथ एक स्थिर कोण बनाती है।

If the tangent to a curve makes a constant angle θ with a fixed line, then prove that the ratio of radius of torsion to radius of curvature is proportional to $\tan\theta$. Further prove that if this ratio is constant, then the tangent makes a constant angle with a fixed direction. 15

8.(a) लाप्लास रूपान्तर प्रविधि का उपयोग कर निम्नलिखित प्रारम्भिक मान समस्या को हल कीजिए।

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = f(t),$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ और $f(t)$, t का एक दिया गया फलन है।

Solve the following initial value problem by using Laplace transform technique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = f(t),$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ and $f(t)$ is a given function of t. 15

8.(b) एक कण, बल-केन्द्र से $\sqrt{c}$ दूरी पर स्थित एक स्तब्धिका से $\sqrt{\frac{2\lambda}{3}c^3}$ वेग से प्रक्षेपित किया जाता है और यह केन्द्रीय त्वरण $\lambda(r^5 - c^2 r)$ से गतिशील है। इस कण की गति का पथ ज्ञात कीजिए। क्या यह वक्र $x^4 + y^4 = c^2$ होगा ?

A particle is projected from an apse at a distance $\sqrt{c}$ from the centre of force with a velocity $\sqrt{\frac{2\lambda}{3}c^3}$ and is moving with central acceleration $\lambda(r^5 - c^2 r)$. Find the path of motion of this particle. Will that be the curve $x^4 + y^4 = c^2$? 20

8.(c) एक अदिश बिन्दु फलन ϕ और सदिश बिन्दु फलन $\vec{f}$ के लिये निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए

$$\nabla\cdot(\phi\vec{f}) = \nabla\phi\cdot\vec{f} + \phi(\nabla\cdot\vec{f})$$

$\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ का मान भी ज्ञात कीजिए और तब उल्लेखित सर्वसमिका का सत्यापन कीजिए।

For a scalar point function ϕ and vector point function $\vec{f}$, prove the identity $\nabla\cdot(\phi\vec{f}) = \nabla\phi\cdot\vec{f} + \phi(\nabla\cdot\vec{f})$. Also find the value of $\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ and then verify stated identity. 15

Civil Services (Main) Examination, 2024

PHKM–U–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

निर्धारित समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़िए)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हुए हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* माना H, $\mathbb{R}^4$ की एक उपसमष्टि है, जो कि सदिशों $v_1 = (1, -2, 5, -3)$, $v_2 = (2, 3, 1, -4)$, $v_3 = (3, 8, -3, -5)$ द्वारा जनित है। तब H का एक आधार एवं विमा ज्ञात कीजिए तथा H के इस आधार को $\mathbb{R}^4$ के एक आधार तक विस्तृत कीजिए।

Let H be a subspace of $\mathbb{R}^4$ spanned by the vectors $v_1 = (1, -2, 5, -3)$, $v_2 = (2, 3, 1, -4)$, $v_3 = (3, 8, -3, -5)$. Then find a basis and dimension of H, and extend the basis of H to a basis of $\mathbb{R}^4$. 10

(b) माना $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक संकारक है तथा $\mathbb{R}$ पर $\mathbb{R}^3$ का एक आधार $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ है। माना कि $Tv_1 = (1, 1, 0)$, $Tv_2 = (1, 0, -1)$, $Tv_3 = (2, 1, -1)$ हैं। T की परिसर समष्टि तथा शून्य समष्टि के लिए एक आधार ज्ञात कीजिए।

Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear operator and $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ be a basis of $\mathbb{R}^3$ over $\mathbb{R}$. Suppose that $Tv_1 = (1, 1, 0)$, $Tv_2 = (1, 0, -1)$, $Tv_3 = (2, 1, -1)$. Find a basis for the range space and null space of T. 10

(c) x के सभी मानों के लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

Discuss the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

for all values of x. 10

(d) टेलर प्रमेय द्वारा $\ln(x)$ का $(x-1)$ की घात में प्रसार कीजिए तथा $\ln(1 \cdot 1)$ का दशमलव के चार स्थानों तक सही मान ज्ञात कीजिए।

Expand $\ln(x)$ in powers of $(x-1)$ by Taylor's theorem and hence find the value of $\ln(1 \cdot 1)$ correct up to four decimal places. 10

(e) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ से होकर जाने वाले लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the right circular cylinder which passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$. 10

2. *(a)* माना $\mathbb{R}$ के ऊपर $\mathbb{R}^3$ पर एक रैखिक संकारक T, $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ द्वारा परिभाषित है। क्या T व्युत्क्रमणीय है? यदि हाँ, तो अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए तथा T^{-1} ज्ञात कीजिए।

Consider a linear operator T on $\mathbb{R}^3$ over $\mathbb{R}$ defined by $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Is T invertible? If yes, justify your answer and find T^{-1}. 15

(b) यदि $u = (x+y)/(1-xy)$ तथा $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ हैं, तब $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ ज्ञात कीजिए। क्या u तथा v फलनतः सम्बन्धित हैं? यदि हाँ, तो सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

If $u = (x+y)/(1-xy)$ and $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$, then find $\partial(u, v)/\partial(x, y)$. Are u and v functionally related? If yes, find the relationship. 15

(c) रेखा $x = 3-6t,\ y = 2t,\ z = 3+2t$ का समतल $3x+4y-5z+26=0$ में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

Find the image of the line $x = 3-6t,\ y = 2t,\ z = 3+2t$ in the plane $3x+4y-5z+26=0$. 20

3\. (a) माना $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर एक सदिश समष्टि दर्शाता है। $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ के मानक आधार के सन्दर्भ में $\phi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} v$ द्वारा दिए गए रैखिक प्रतिचित्रण $\phi : V \to V$ का आव्यूह ज्ञात कीजिए और तब ϕ की कोटि (रैंक) ज्ञात कीजिए। क्या ϕ व्युत्क्रमणीय है? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

Let $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denote a vector space over the field of real numbers. Find the matrix of the linear mapping $\phi : V \to V$ given by $\phi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} v$ with respect to standard basis of $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, and hence find the rank of ϕ. Is ϕ invertible? Justify your answer. 15

(b) ऊँचाई h तथा अर्ध-शीर्ष कोण α वाले एक शंकु के अंतर्गत सबसे बड़े बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the greatest cylinder which can be inscribed in a cone of height h and semi-vertical angle α. 20

(c) शंकु $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$ का शीर्ष ज्ञात कीजिए।

Find the vertex of the cone $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$. 15

4\. (a) माना $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ एक 3×3 आव्यूह है। A का अभिलाक्षणिक मान तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए। अतः A^{-15} का अभिलाक्षणिक मान तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^{-15} = (A^{-1})^{15}$ है।

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ be a 3×3 matrix. Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A. Hence find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A^{-15}, where $A^{-15} = (A^{-1})^{15}$. 20

(b) द्विशः समाकलन का प्रयोग करते हुए हृदयाभ (कार्डिऑइड) $r = a(1+\cos\theta)$ के अन्दर तथा वृत्त $r = a$ के बाह्य स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Using double integration, find the area lying inside the cardioid $r = a(1+\cos\theta)$ and outside the circle $r = a$. 15

(c) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो समतल $3x+2y-z+2=0$ को बिन्दु $(1, -2, 1)$ पर स्पर्श करता है और गोले $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ को लांबिकतः काटता है।

Find the equation of the sphere which touches the plane $3x+2y-z+2=0$ at the point $(1, -2, 1)$ and cuts orthogonally the sphere $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$. 15

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) वक्र-कुल $r = c(\sec\theta + \tan\theta)$ के लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए, जहाँ c एक प्राचल है।

Find the orthogonal trajectories of the family of curves $r = c(\sec\theta + \tan\theta)$, where c is a parameter. 10

(b) लाप्लास रूपान्तर का प्रयोग करते हुए समाकलन समीकरण $y(t) = \cos t + \int_0^t y(x)\cos(t-x)\,dx$ को हल कीजिए।

Solve the integral equation $y(t) = \cos t + \int_0^t y(x)\cos(t-x)\,dx$ using Laplace transform. 10

(c) किसी समय t (सेकण्ड में) पर एक चर समांतर-षट्फलक की सहावसानी किनारे सदिशों

$$\bar{\alpha} = t\hat{i} + (t+1)\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$$
$$\bar{\beta} = 2t\hat{i} + (3t-1)\hat{j} + t\hat{k}$$
$$\bar{\gamma} = \hat{i} + 3t\hat{j} + \hat{k}$$

द्वारा निरूपित हैं। समांतर-चतुर्भुज, जिसकी सहावसानी किनारे $\bar{\alpha}$ और $\bar{\gamma}$ हैं, के सदिशीय क्षेत्रफल की परिवर्तन दर क्या है? $t=1$ सेकण्ड पर समांतर-षट्फलक के आयतन की परिवर्तन दर भी ज्ञात कीजिए।

At any time t (in seconds), the coterminous edges of a variable parallelepiped are represented by the vectors

$$\bar{\alpha} = t\hat{i} + (t+1)\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$$
$$\bar{\beta} = 2t\hat{i} + (3t-1)\hat{j} + t\hat{k}$$
$$\bar{\gamma} = \hat{i} + 3t\hat{j} + \hat{k}$$

What is the rate of change of the vectorial area of the parallelogram, whose coterminous edges are $\bar{\alpha}$ and $\bar{\gamma}$? Also find the rate of change of the volume of the parallelepiped at $t=1$ second. 10

(d) एक ठोस गोले के ऊपर समान त्रिज्या का एक ठोस गोलार्ध साम्यावस्था में रखा है। दो स्थितियों में—*(i)* जब गोलार्ध का वक्रीय पृष्ठ तथा *(ii)* जब गोलार्ध का समतलीय पृष्ठ गोले पर स्थित है, साम्यावस्था का स्थायित्व ज्ञात कीजिए।

A solid hemisphere rests in equilibrium on a solid sphere of equal radius. Determine the stability of the equilibrium in the two situations—*(i)* when the curved surface and *(ii)* when the flat surface of the hemisphere rests on the sphere. 10

(e) (i) माना C एक समतल वक्र $\bar{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$ है, जहाँ f और g के द्वितीय कोटि के अवकलज हैं। दर्शाइए कि वक्र के किसी बिन्दु पर वक्रता

$$\kappa = \frac{|f'(t)\, g''(t) - g'(t)\, f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}$$

है। इस वक्र के किसी बिन्दु पर ऐंठन (टॉर्शन) τ का मान क्या है?

Let C be a plane curve $\bar{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$, where f and g have second-order derivatives. Show that the curvature at a point is given by

$$\kappa = \frac{|f'(t)\, g''(t) - g'(t)\, f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}$$

What is the value of torsion τ at any point of this curve? 5

(ii) दर्शाइए कि किसी वक्र के दो क्रमागत बिन्दुओं पर मुख्य अभिलम्ब प्रतिच्छेद नहीं करते जब तक कि ऐंठन (टॉर्शन) τ शून्य न हो।

Show that the principal normals at two consecutive points of a curve do not intersect unless torsion τ is zero. 5

6. (a) लम्बाई l की छः हल्की छड़ों द्वारा निर्मित एक सम चतुष्फलक एक चिकने क्षैतिज समतल पर रखा है। W भार तथा r त्रिज्या का एक छल्ला तिर्यक् भुजाओं द्वारा आलम्बित है। कल्पित कार्य सिद्धान्त का उपयोग करते हुए किसी भी एक क्षैतिज भुजा में प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

A regular tetrahedron, formed of six light rods, each of length l, rests on a smooth horizontal plane. A ring of weight W and radius r is supported by the slant sides. Using the principle of virtual work, find the stress in any of the horizontal sides. 15

(b) सरल आवर्त गति में एक कण की दो स्थितियों में वेग u और v हैं तथा दो संगत त्वरण f_1 और f_2 हैं। k के किस मान/किन मानों के लिए दोनों स्थितियों के बीच की दूरी $k(v^2 - u^2)$ है? यह भी दर्शाइए कि गति का आयाम

$$\frac{1}{f_2^2 - f_1^2}[(u^2 - v^2)(u^2 f_2^2 - v^2 f_1^2)]^{1/2}$$

है।

A particle executes simple harmonic motion such that in two of its positions, velocities are u and v, and the two corresponding accelerations are f_1 and f_2. For what value(s) of k, the distance between the two positions is $k(v^2 - u^2)$? Show also that the amplitude of the motion is

$$\frac{1}{f_2^2 - f_1^2}[(u^2 - v^2)(u^2 f_2^2 - v^2 f_1^2)]^{1/2}$$

15

(c) (i) एक हल के रूप में $u(x) = -e^{-x}$ का उपयोग करते हुए अवकल समीकरण $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ का दूसरा हल ज्ञात कीजिए।

Find the second solution of the differential equation $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ using $u(x) = -e^{-x}$ as one of the solutions. 10

(ii) प्राचल-विचरण विधि का उपयोग कर अवकल समीकरण $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ by the method of variation of parameters. 10

7. (a) आयतीय क्षेत्र $R: |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b$ में प्रारम्भिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ के अद्वितीय हल के अस्तित्व के लिए अद्वितीयता प्रमेय का कथन लिखिए। एक उपयुक्त आयत R में प्रारम्भिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y},\ y(1) = 0$ के हल के अस्तित्व और अद्वितीयता का परीक्षण कीजिए। यदि एक से अधिक हल मौजूद हैं, तो सभी हलों को ज्ञात कीजिए।

State uniqueness theorem for the existence of unique solution of the initial value problem $\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ in the rectangular region $R: |x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$. Test the existence and uniqueness of the solution of the initial value problem $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y},\ y(1) = 0$, in a suitable rectangle R. If more than one solution exist, then find all the solutions. 15

(b) लम्बाई l की एक हल्की अवितान्य डोरी द्वारा एक नियत बिन्दु से ऊर्ध्वाधर लटका हुआ एक भारी कण प्रारम्भिक वेग u के साथ एक वृत्त में घूमना शुरू करता है ताकि एक ऊर्ध्वाधर समतल में एक पूर्ण परिक्रमण कर सके। दर्शाइए कि किसी भी व्यास के सिरों पर तनावों का योग अचर है।

A heavy particle hanging vertically from a fixed point by a light inextensible string of length l starts to move with initial velocity u in a circle so as to make a complete revolution in a vertical plane. Show that the sum of tensions at the ends of any diameter is constant. 15

(c) स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिए तथा इसको सदिश क्षेत्र $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ के लिए, पृष्ठ S पर जो कि बेलन $z = 1 - x^2;\ 0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2$ का उपरिमुखी अभिविन्यस्त भाग है, सत्यापित कीजिए।

State Stokes' theorem and verify it for the vector field $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ over the surface S, which is the upwardly oriented part of the cylinder $z = 1 - x^2$, for $0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2$. 20

8. *(a)* लाप्लास रूपान्तर का उपयोग करके प्रारम्भिक मान समस्या

$$y'' + 2y' + 5y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

को हल कीजिए, जहाँ $\delta(t-2)$ डिरैक डेल्टा फलन को दर्शाता है।

Using Laplace transform, solve the initial value problem

$$y'' + 2y' + 5y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

where $\delta(t-2)$ denotes the Dirac delta function. 15

(b) गाऊस के अपसरण प्रमेय का उपयोग करते हुए बेलन $x^2 + y^2 = 16$ तथा समतलों $z = 1$ और $z = 5$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर समाकल

$$\iint_S (y^2 \hat{i} + xz^3 \hat{j} + (z-1)^2 \hat{k}) \cdot \hat{n}\, dS$$

का मान निकालिए।

Using Gauss divergence theorem, evaluate the integral

$$\iint_S (y^2 \hat{i} + xz^3 \hat{j} + (z-1)^2 \hat{k}) \cdot \hat{n}\, dS$$

over the region bounded by the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ and the planes $z = 1$ and $z = 5$. 15

(c) d दूरी से एक कण को समान दूरी पर स्थित एक वृत्त में उसके वेग के बराबर वेग से 45° के कोण पर प्रक्षेपित करने पर वह केन्द्रीय त्वरण $\mu\left(\frac{3}{r^3} + \frac{d^2}{r^5}\right)$ के साथ गति करता है। सिद्ध कीजिए कि बल के केन्द्र तक इसके पहुँचने का समय $\frac{d^2}{\sqrt{2\mu}}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ है।

A particle moves with a central acceleration $\mu\left(\frac{3}{r^3} + \frac{d^2}{r^5}\right)$ being projected from a distance d at an angle 45° with a velocity equal to that in a circle at the same distance. Prove that the time it takes to reach the centre of force is $\frac{d^2}{\sqrt{2\mu}}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$. 20

★ ★ ★